

Análisis de malla para circuitos no planos (3D)



Michael Stanimirov

Centro de Investigación e Innovación Eléctrica,
Mecánica y de la Industria,
Universidad Tecnológica de Panamá
<https://cinemi.utp.ac.pa/>
michael.stanimirov@utp.ac.pa

Liseth Sandoval

Facultad de Ciencias y Tecnología,
Universidad Tecnológica de Panamá
<https://fct.utp.ac.pa/>
lisset.sandoval@utp.ac.pa

Palabras clave.

Análisis de malla, análisis de nodo,
circuitos eléctricos no-planos,
teorema de Weyl y Tellegen

1. Introducción

La educación en ingeniería eléctrica y carreras que integran la teoría de circuitos en sus currículos, como mecatrónica, automatización, electrónica, biociencias como ingeniería biomédica y biotecnología son base de la investigación y desarrollo de tecnologías de punta. Dirigidas a la innovación en sistemas de energías renovables, sistemas de diagnósticos clínicos, tecnologías para procesos analíticos y sensores inteligentes. Dentro de la teoría de circuitos el ingeniero e investigador se enfrentan al problema de determinar las corrientes y voltajes en cualquier circuito. Cuando los ingenieros se enfrentan a problemas complejos como lo son la aplicación del análisis de malla para circuitos tridimensionales la literatura al respecto es contradictoria [3, 4, 5, 6, 17, 18, 21], de aquí la necesidad de abordar este tema.

Durante el cálculo de voltajes y corrientes de circuitos eléctricos se utilizan dos leyes fundamentales. La ley de corrientes de Kirchhoff, basada en la conservación de masas respectivamente cargas y la ley de voltajes de Kirchhoff basada en la ley de la conservación de energía (ver Anexo 1 y 2). A partir de estas leyes se establece un sistema de ecuaciones independientes que permite analizar un circuito.

La solución del sistema de ecuaciones depende de las características numéricas, como el determinante y el número de condición [1, 2, 3]. Para la resolución de las ecuaciones e inversión de la matriz se aplican métodos numéricos con diferentes características numéricas. Entre ellos se encuentran la eliminación de Gauß, la regla de



Cramer, la ortogonalización de Gram-Schmidt o la transformación de Householder.

La aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff para la formulación del sistema de ecuaciones independientes del circuito eléctrico se conoce como análisis nodal o análisis de nodos. La aplicación de la ley de voltajes de Kirchhoff esta conocido como análisis de malla, análisis de bucle o análisis de lazo. Por supuesto existen métodos mezclados que aplican las dos leyes de Kirchhoff. Entre ellos se encuentran el método del super-nodo, el método de la supermalla, el método de las corrientes de ramas y el método de los voltajes de ramas [3, 4, 5, 6, 7, 19, 21, 22]. Aunque estos métodos son conocidos, constantemente se publican métodos para generalizar y simplificar especialmente la búsqueda de las mallas independientes que es mas complicada que la determinación de los nodos independientes [8, 9, 10]. Las mallas independientes permiten la formación del sistema de ecuaciones de acuerdo con el análisis de malla y los nodos independientes son necesarios para la formación del sistema de ecuaciones de acuerdo con el análisis de nodo. Varios libros y textos recomiendan la utilización del análisis nodal para circuitos no planos [3, 4, 16, 17, 21]. Estos autores indican que el análisis de malla no se puede aplicar a circuitos eléctricos no planos. Por ejemplo, los autores de [3] indican que “El análisis de lazo no es tan general como el nodal, porque sólo es aplicable a un circuito con disposición plana”.

A partir de aquí los autores introducen un paso adicional en el análisis de malla: la prueba, para determinar si se puede convertir el circuito no plano en un circuito plano.

Queda establecido que la aplicación del método de análisis de malla por inspección solo funciona para circuitos planos [3, 4, 16, 17, 21]. Sin embargo, en diferentes libros de texto, monografías o manuales de la ingeniería eléctrica no se establecen límites sobre la factibilidad del análisis de malla [5, 6, 7, 18]. Estas referencias indican el uso del análisis de malla, pero carecen de ejemplos

detallados de como calcular voltajes y corrientes en circuitos eléctricos no planos.

En este artículo se demostrará que si el ingeniero aplica las reglas –siguiendo la ley de voltaje de Kirchhoff y por supuesto de la conservación de energía (ver Anexo 1 y 2)– en forma correcta, se puede utilizar el análisis de malla sin objeciones para circuitos eléctricos no planos [5, 6]. La precisión de la solución del sistema de ecuaciones depende de la estabilidad numérica y del número de condición de la matriz a invertir. En este artículo se desarrolló la aplicación del análisis de malla para circuitos no planos utilizando el análisis nodal como prueba de los resultados y se presenta la solución completa de un circuito no plano con resultados intermedios. Aplicando el teorema de Weyl y Tellegen [25] en forma del balance de las potencias en cada rama para la verificación de ambos métodos.

2. Sistemas de ecuaciones con mallas y nodos independientes

Durante el análisis de circuitos la cantidad de ecuaciones que hay que solucionar es determinada por los nodos y las mallas independientes. Además, el número de las ecuaciones independientes del sistema depende no solo de la cantidad de nodos (N_{nodo}) y ramas (N_{rama}) si no del método elegido. El análisis de malla requiere la resolución de N_M ecuaciones independientes. N_M corresponde al número de mallas independientes, que se calcula con la ecuación (1).

$$N_M = N_{rama} - (N_{nodo} - 1) \quad (1)$$

El análisis de malla genera un sistema de N_M ecuaciones independientes basado en las mallas independientes que puede expresarse con el vector $I_{M'}$ que contiene las corrientes desconocidas (I_n) de las mallas (n), el vector $V_{M'}$ con los voltajes V_n que contienen el negativo de la suma algebraica en el sentido de la malla (n) de todas fuentes de voltajes en la malla (n) y la matriz de resistencia de malla (R_M).

$$V_M = R_M \cdot I_M$$

donde

$$I_M = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \vdots \\ I_{N_M} \end{bmatrix} \quad V_M = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \vdots \\ V_{N_M} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Se pueden determinar los diferentes valores de los elementos R_{nm} de la matriz R_M simplemente de la siguiente manera y de acuerdo con [5, 6, 18]:

$$I_M = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} & \dots & R_{1N_M} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} & \dots & R_{2N_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} & \dots & R_{nN_M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N_M1} & R_{N_M2} & \dots & R_{N_Mm} & \dots & R_{N_MN_M} \end{bmatrix} \quad (3)$$

R_{nn} ... La suma de todas las resistencias de la malla (n)

R_{nm} ... Valor de la resistencia común o mutua de las mallas (n) y (m), con $n \neq m$. Si las direcciones de las corrientes de las mallas (n) y (m) son iguales, el valor es positivo, y si son opuestas, el valor es negativo. Si las mallas (n) y (m) no tienen una resistencia común, su valor es 0, ($R_{nm} = 0$).

El análisis nodal requiere de la resolución de un sistema de N_N ecuaciones independientes. N_N es la cantidad de los nodos independientes, que se calcula con la ecuación descrita (4).

$$N_N = N_{nodo} - 1 \quad (4)$$

El nodo no considerado se define como nodo de referencia, con un potencial de referencia de 0 V. Todos los voltajes de nodo se miden en relación con este nodo. El análisis nodal genera un sistema de ecuaciones que se puede expresar con los siguientes vectores: el vector de corrientes de nodo (I_N), que representa la suma algebraica de todas corrientes inyectadas en el nodo corres-

pondiente (n), el vector de voltajes de nodo (V_N), que contiene los voltajes de los nodos independientes (V_N) de los nodos (n) y la matriz de conductividad de nodo (G_N).

$$I_N = G_N \cdot V_N$$

donde

$$V_N = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \vdots \\ V_{N_N} \end{bmatrix} \quad I_N = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \vdots \\ I_{N_N} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Se puede determinar los diferentes valores de los elementos G_{nm} de la matriz G_N simplemente de la siguiente manera de acuerdo con la descripción realizada por [3, 4, 5, 6, 16, 17, 18, 21, 22]:

$$G_N = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} & \dots & G_{1N_N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} & \dots & G_{2N_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} & \dots & G_{nN_N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_N1} & G_{N_N2} & \dots & G_{N_Nm} & \dots & G_{N_NN_N} \end{bmatrix} \quad (6)$$

G_{nn} ... La suma de todas las conductividades conectadas al nodo (n)

G_{nm} ... Negativo de la suma de las conductividades conectadas directamente entre los nodos, (n) y (m), con $n \neq m$. Si la conductividad G_{nm} no está conectada entre los nodos (n) y (m) su valor es 0.

Se analiza cuantas ecuaciones independientes se obtienen aplicando el análisis nodal y el análisis de malla al circuito eléctrico no plano representado en la Figura 1.

El análisis nodal para el circuito eléctrico no plano representado en la Figura 1 requiere la resolución de un sistema con cuatro ecuaciones independientes ($N_N = N_{nodo} - 1 = 5 - 1 = 4$). La aplicación

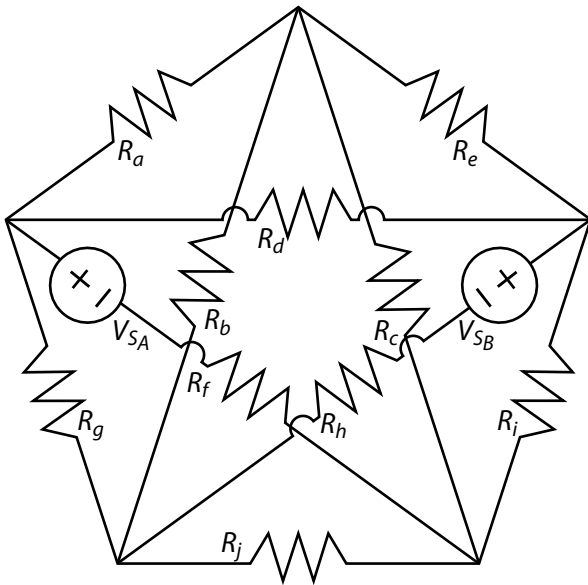


Figura 1. Circuito eléctrico no plano según [23] con 5 nodos, $N_{nodo} = 5$, 10 ramas, $N_{rama} = 10$ y 2 fuentes de voltaje

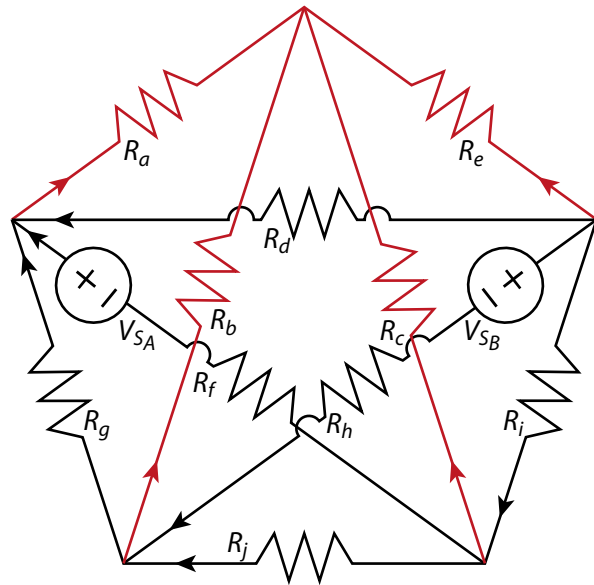


Figura 2. Circuito eléctrico no plano con el árbol completo del circuito (ramas rojas: a, b, c, e), el co-árbol (ramas negras: d, f, g, h, j, i), las definiciones de los sentidos de las corrientes en las ramas y los números de los nodos (I, II, III, IV, V). Los voltajes a través de las resistencias caen en la misma dirección como la corriente en la rama.

del análisis de malla para el mismo circuito requiere la resolución de seis ecuaciones independientes ($N_M = N_{rama} - (N_{nodo} - 1) = 10 - 4 = 6$). La aplicación del análisis de malla requiere más operaciones matemáticas que la aplicación del análisis nodal. Por razón del esfuerzo computacional se recomienda la utilización del análisis nodal. La Tabla 1 muestra cuándo se usa qué método.

$N_M > N_N$	$N_M < N_N$
Análisis nodal	Análisis de malla

Tabla 1. Tabla con los criterios de decisión para la aplicación del análisis de nodal y para la aplicación del análisis de malla

Los determinantes (DET_{GN} , DET_{RM}) de las matrices a invertir (G_N , R_M) nos indican si el sistema de ecuaciones es independiente. En ese caso el determinante debe tener un valor diferente a 0.

$$DET_{GN} = |G_N| \quad DET_{RM} = |R_M| \quad (7)$$

El símbolo aplicado como operador matricial $|\cdot|$ representa el determinante de la matriz. [1, 2]

El número de condición ($COND_{GN}$, $COND_{RM}$) de la matriz a invertir (G_N , R_M) es relacionado con la propagación de errores.

$$COND_{RM} = \|R_N\| \|R_M^{-1}\|$$

$$COND_{GN} = \|G_N\| \|G_M^{-1}\| \quad (8)$$

El símbolo $\|\cdot\|$ representa la norma de Frobenius, llamada también la norma de Hilbert-Schmidt [1, 2].

3. Análisis de malla

De acuerdo con el análisis de malla la formación del sistema de ecuaciones independientes, el punto de salida son las mallas independientes. Las trayectorias cerradas formados por ramas también se denominan mallas, lazos o bucles. Se denominan voltajes de las ramas (V_{ra}) y corrientes de las ramas (I_{ra}) a través de las ramas con los índices de las resistencias (R_{ra}) en las ramas. En la literatura se presentan varios métodos para realizar la búsqueda de las mallas independientes. En

este artículo aplicamos el siguiente método, que resume diferentes métodos. Para la determinación de las mallas independientes de un circuito eléctrico seguimos los 3 pasos basados en el método de "árbol completo" [5]. Esos 3 pasos representan la preparación topológica del circuito.

1. Enumerar los nodos. Determinar los sentidos de las corrientes en las ramas. Dibujar la trayectoria, que conecta todos los nodos sin formar una trayectoria cerrada (Esta trayectoria es denominada el "árbol completo" del circuito. El resto de las ramas pertenecen al co-árbol).
2. Elegir todas las corrientes de las ramas del co-árbol como corrientes de las mallas (I_{Malla}) y llenar el nombre en la columna (I_{Malla}) de la Tabla 2. Las corrientes de estas ramas determinen el sentido de la corriente de la malla (I_{Malla}). La Figura 2 presenta el resultado del primer paso de la búsqueda de las mallas independientes.

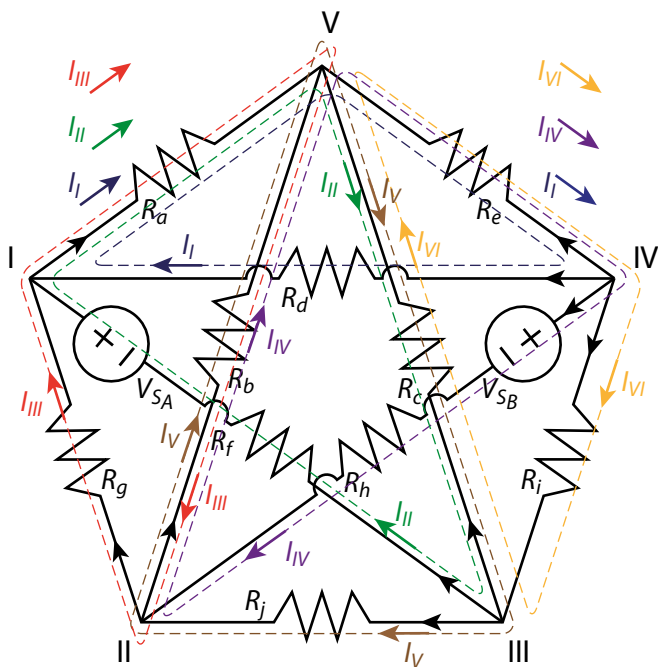


Figura 4. Circuito eléctrico con las mallas independientes marcados por las corrientes de malla (II, III, IIII, IV, V, VI) y los nodos numerados (I, II, III, IV, V). Las flechas negras marcan el sentido de la corriente de la rama y las flechas coloradas marcan el sentido de la corriente de malla, que es sentido de la malla.

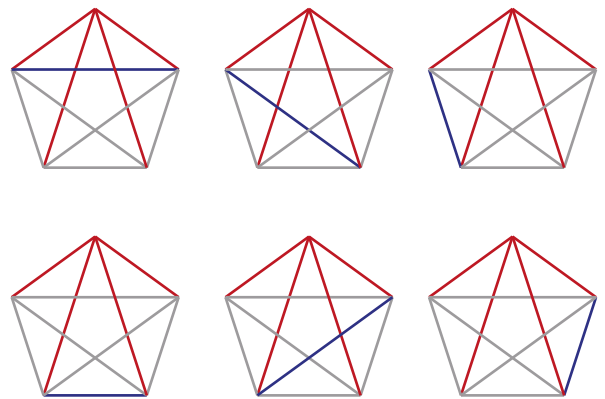


Figura 3. Formación de las 6 mallas independientes del circuito en Figura 1 con las ramas del árbol completo (ramas rojas) y ramas del co-árbol (ramas grises/azules)

3. Formar por cada rama del co-árbol una trayectoria cerrada con las ramas del árbol del circuito. Entregar los índices de las ramas que pertenecen a la malla en la columna Ramas de la Tabla 2.

Se pueden definir los sentidos de las corrientes en las ramas arbitrariamente. Pero en ese caso se han elegido los sentidos de las ramas del co-árbol de tal manera que cuando una rama del co-árbol cierre una malla con las ramas del árbol, el sentido de la malla es el sentido de las manecillas de reloj. Entonces las mallas independientes encontradas tienen el sentido de manecilla de reloj, por razones de la comparabilidad con los métodos de acuerdo con [3, 4]. Las mallas encontradas son mallas independientes, que reducen el esfuerzo computacional porque en las mallas fundamentales cada corriente de malla corresponde a una corriente de rama del co-árbol. En la Figura 3 ilustramos el proceso de la búsqueda de las mallas independientes de acuerdo con el método del árbol completo en detalle.

En la Figura 3 se presenta como cada rama del co-árbol (azul) cierre una malla a través de las ramas de árbol (rojo) que son conectadas a esta rama. El método del árbol completo tiene la ventaja que se encuentra directamente las mallas independientes.

El resultado de los 3 pasos de búsqueda de las mallas independientes se presenta en la Figura 4.

La Tabla 2 asigna las ramas a las mallas correspondientes y el sentido de la corriente de la malla. El sentido de la corriente de la malla (I_{Malla}) corresponde al sentido de la corriente de rama en la columna I_{rama} . Los signos en la columna "Ramas de malla" indican, si el sentido de la corriente en la rama correspondiente es igual o opuesta al sentido de la corriente de la malla, que la corriente en la columna I_{rama} . El signo positivo indica, que los dos sentidos son iguales, y el signo negativo indica los dos sentidos son diferentes respectivamente en opuesta.

Por ejemplo, las ramas d, a, -e pertenecen a la malla I, eso significa, que estas ramas forman una trayectoria cerrada en el circuito. Los sentidos de las corrientes I_d y I_a son opuestos al sentido de la corriente de la malla (I_I).

Se recomienda indicar respectivamente colorear las trayectorias cerradas en el circuito eléctrico para aumentar la visibilidad. Analizando las trayectorias de las mallas se puede determinar cuales corrientes de malla se superponen en cuales ramas del árbol. Se puede verificar, que la corriente en la columna I_{rama} es la corriente de la malla correspondiente. En el caso de la malla I, la corriente I_d es igual a la corriente I_I . La formula (9) contiene las relaciones entre las corrientes de ramas y las corrientes de malla que se superponen en las ramas correspondientes.

$$\begin{aligned} I_a &= I_I + I_{II} + I_{III} \\ I_b &= -I_{III} + I_{IV} + I_V \\ I_c &= -I_{II} - I_V + I_{VI} \\ I_e &= -I_I - I_{IV} - I_{VI} \end{aligned} \quad (9)$$

Con la Tabla 2 y la formula 9 se calculan los voltajes de cada rama dependiendo de las corrientes de malla.

La caída de voltaje a través de las resistencias en las ramas ($V_{R_{ra}}$) se puede calcular con las corrien-

Malla	I_{Malla}	$I_{rama} (I_{ra})$	Ramas de malla
I	I_I	I_d	d, a, -e
II	I_{II}	I_f	f, a, -c
III	I_{III}	I_g	g, a, -b
IV	I_{IV}	I_h	h, b, -e
V	I_V	I_j	j, b, -c
VI	I_{VI}	I_i	i, c, -e

Tabla 2. Tabla con la asignación de las ramas a las mallas correspondientes y cual rama determine el sentido de la malla correspondiente

tes de ramas (I_{ra}) y resistencias en las ramas (R_{ra}) aplicando la ley de Ohm.

$$V_{R_{ra}} = R_{ra} \cdot I_{ra}$$

donde

$$I_{ra} \in [I_a \dots I_j]$$

$$V_{R_{ra}} \in [V_{R_a} \dots V_{R_j}]$$

$$R_{ra} \in [R_a \dots R_j] \quad (10)$$

Sustituyendo las corrientes de rama (I_{ra}) por sus dependencias de las corrientes de malla de la Tabla 2 y la formula 9 se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones para el cálculo de los voltajes en las ramas.

$$V_{R_a} = R_a \cdot I_a = R_a \cdot (I_I + I_{II} + I_{III}) \quad (11)$$

$$V_{R_b} = R_b \cdot I_b = R_b \cdot (-I_{III} + I_{IV} + I_V)$$

$$V_{R_c} = R_c \cdot I_c = R_c \cdot (-I_{II} - I_V + I_{VI})$$

$$V_{R_e} = R_e \cdot I_e = R_e \cdot (-I_I - I_{IV} - I_{VI})$$

$$V_{R_d} = R_d \cdot I_d = R_d \cdot I_I$$

$$V_{R_f} = R_f \cdot I_f = R_f \cdot I_{II}$$

$$V_{R_g} = R_g \cdot I_g = R_g \cdot I_{III}$$

$$V_{R_h} = R_h \cdot I_h = R_h \cdot I_{IV}$$

$$V_{R_j} = R_j \cdot I_j = R_j \cdot I_V$$

$$V_{R_i} = R_i \cdot I_i = R_i \cdot I_{VI}$$

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene para cada malla (I, II, III, IV, V, VI) una ecuación que representa la suma algebraica de los voltajes en la malla. Si el sentido del voltaje es igual al sentido de la malla, el valor en (12) es positivo, si no, el valor es negativo.

$$I: 0 = V_{R_d} + V_{R_a} + V_{R_e} \quad (12)$$

$$II: 0 = V_{R_f} + V_{R_a} - V_{R_c} - V_{SA}$$

$$III: 0 = V_{R_g} + V_{R_a} - V_{R_b}$$

$$IV: 0 = V_{R_h} + V_{R_b} - V_{R_e} + V_{SB}$$

$$V: 0 = V_{R_j} + V_{R_b} - V_{R_c}$$

$$VI: 0 = V_{R_i} + V_{R_c} - V_{R_e}$$

Separando las fuentes de voltaje (V_{SA} , V_{SB}) al lado izquierda de las ecuaciones y sustituyendo los voltajes a través de las resistencias de las ramas $V_{R_{ra}}$ por los términos correspondientes en las ecuaciones (11) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$0 = R_d \cdot I_1 + R_a \cdot (I_1 + I_{II} + I_{III}) - R_e \cdot (-I_1 - I_{IV} - I_{VI}) \quad (13)$$

$$V_{SA} = R_f \cdot I_{II} + R_a \cdot (I_1 + I_{II} + I_{III}) - R_c \cdot (-I_{II} - I_V + I_{VI})$$

$$0 = R_g \cdot I_{III} + R_a \cdot (I_1 + I_{II} + I_{III}) - R_b \cdot (-I_{III} + I_{IV} + I_V)$$

$$-V_{SB} = R_h \cdot I_{IV} + R_b \cdot (-I_{III} + I_{IV} + I_V) - R_e \cdot (-I_1 - I_{IV} - I_{VI})$$

$$0 = R_j \cdot I_V + R_b \cdot (-I_{III} + I_{IV} + I_V) - R_c \cdot (-I_{II} - I_V + I_{VI})$$

$$0 = R_i \cdot I_{VI} + R_c \cdot (-I_{II} - I_V + I_{VI}) - R_e \cdot (-I_1 - I_{IV} - I_{VI})$$

Agrupando las fuentes de voltaje del lado izquierda (V_{SA} , $-V_{SB}$) de las ecuaciones descritas (13) en el vector V_M , y despejando las corrientes de las mallas ($I_1, I_{II}, I_{III}, I_{IV}, I_V, I_{VI}$) en el vector I_M y las resistencias en la matriz R_M , se puede expresar el sistema de ecuaciones en forma matricial.

$$V_M = R_M \cdot I_M$$

donde

$$I_M = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_{II} \\ I_{III} \\ I_{IV} \\ I_V \\ I_{VI} \end{bmatrix} \quad V_M = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{SA} \\ 0 \\ -V_{SB} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$R_M = \begin{bmatrix} R_1 & R_a & R_a & R_e & 0 & R_e \\ R_a & R_{II} & R_a & 0 & R_c & -R_c \\ R_a & R_a & R_{III} & -R_b & -R_b & 0 \\ R_e & 0 & -R_b & R_{IV} & R_b & R_e \\ 0 & R_c & -R_b & R_b & R_V & -R_c \\ R_e & -R_c & 0 & R_e & -R_c & R_{VI} \end{bmatrix}$$

donde

$$R_1 = R_d + R_a + R_e$$

$$R_{II} = R_f + R_c + R_a$$

$$R_{III} = R_g + R_b + R_a$$

$$R_{IV} = R_h + R_b + R_e$$

$$R_V = R_j + R_b + R_c$$

$$R_{VI} = R_i + R_e + R_c$$

Ese resultado prueba el método formal descrito conjunto con las ecuaciones (2 y 3). Aplicando estas reglas sencillas del capítulo 2, se obtiene las mismas variables en los vectores (I_M y V_M) y la matriz (R_M).

Las corrientes de malla se pueden calcular invirtiendo la matriz de las resistencias de malla (R_M) y multiplicarla con el vector de voltajes de malla (V_M)

$$I_M = R_M^{-1} \cdot V_M \quad (15)$$

Los voltajes y corrientes de ramas (V_{ra} , I_{ra}) se puede calcular mediante de las ecuaciones en la Tabla 3 y con el sistema de ecuaciones (11).

4. Resultados del análisis de malla

Como ejemplo se utilizan los siguientes valores de las resistencias y las fuentes de voltajes.

$$R_{rama} = \begin{bmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \\ R_d \\ R_e \\ R_f \\ R_g \\ R_h \\ R_i \\ R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} \Omega \quad V_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (16)$$

Antes de la ejecución de la fórmula (15) averiguamos, si es posible invertir la matriz de resistencia de malla (R_M).

$$R_M = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 10 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 14 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 14 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 4 & -3 & 17 \end{bmatrix} \Omega \quad (17)$$

El valor del determinante de la matriz R_M ($\det(R_M) = 1898766.0$) nos confirma que el sistema de ecuaciones es independiente y que la matriz R_M es invertible. El valor del número de condición de 3.7446 nos indica que podemos aplicar los métodos estándar como la eliminación de Gauß o la regla de Cramer para la inversión de la matriz R_M .

De esta forma se calcula el vector de las corrientes de malla (I_M) con una exactitud de 6 dígitos.

$$I_M = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \\ I_{IV} \\ I_V \\ I_{VI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.124998 \\ 0.577164 \\ -0.198223 \\ -0.623431 \\ -0.016606 \\ 0.216200 \end{bmatrix} A \quad (18)$$

Con las relaciones entre las corrientes de malla y las corrientes en las ramas (Tabla 2 y fórmula (9)) se puede calcular las corrientes de rama de rama (I_{rama}).

$$I_{rama} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_e \\ I_d \\ I_f \\ I_g \\ I_h \\ I_j \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_I + I_{II} + I_{III} \\ -I_{III} + I_{IV} + I_V \\ -I_{II} - I_V + I_{VI} \\ -I_I - I_{IV} - I_{VI} \\ I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \\ I_{IV} \\ I_V \\ I_{VI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.503939 \\ -0.441813 \\ -0.344358 \\ 0.282232 \\ 0.124998 \\ 0.577164 \\ -0.198223 \\ -0.623431 \\ -0.016606 \\ 0.216200 \end{bmatrix} A \quad (19)$$

Los voltajes a través (V_{rama}) de las ramas se calcula con los voltajes a través de las resistencias y las fuentes de voltajes (V_{SA} y V_{SB}) en las ramas correspondientes (f y h).

Para el cálculo de los voltajes de rama hay que considerar las fuentes de voltaje en las ramas correspondientes, especialmente en ese caso en las ramas f y h.

$$V_{rama} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_e \\ V_d \\ V_f \\ V_g \\ V_h \\ V_j \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R_a} \\ V_{R_b} \\ V_{R_c} \\ V_{R_e} \\ V_{R_d} \\ V_{R_f} - V_{S_A} \\ V_{R_g} \\ V_{R_h} + V_{S_B} \\ V_{R_i} \\ V_{R_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50394 \\ -0.88363 \\ -1.03308 \\ 1.12893 \\ 0.62499 \\ -1.53701 \\ -1.38756 \\ 2.01255 \\ -0.14945 \\ 2.16200 \end{bmatrix} V \quad (20)$$

El resultado de la aplicación del teorema de Weyl y Tellegen en forma de la multiplicación escalar de los vectores de voltaje y de las corrientes de ramas (21) ratifica que todas las potencias se en-

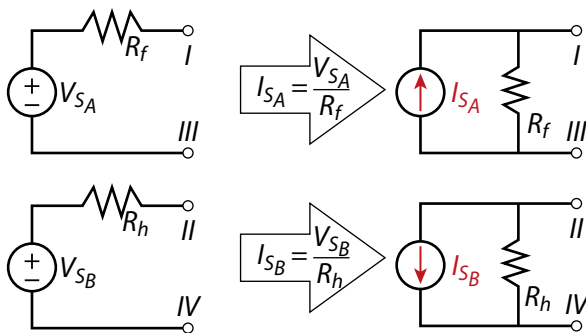


Figura 5. Conversión de las fuentes de voltajes de las ramas f y h en fuentes de corrientes según el teorema de Mayer y Norton

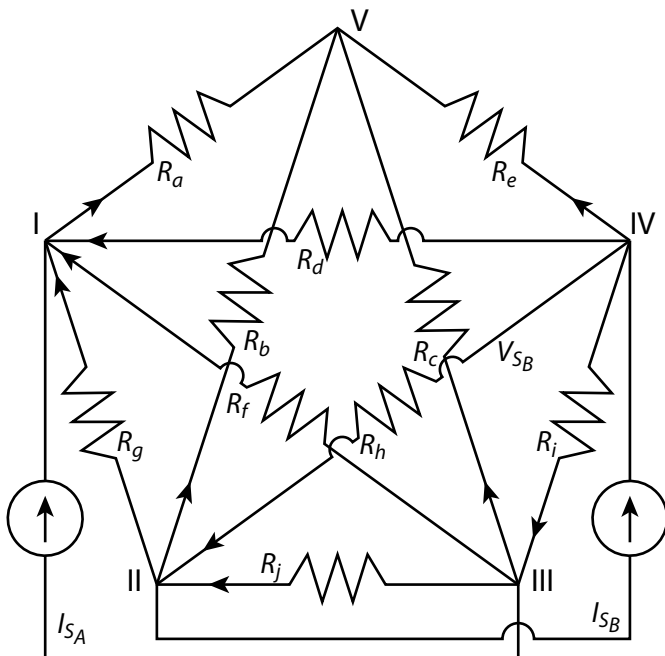


Figura 6. Circuito eléctrico no plano con cuatro nodos independientes caracterizados por los voltajes de nodos ($V_I, V_{II}, V_{III}, V_{IV}$) en los nodos numerados (I, II, III, IV) y dos fuentes de corrientes (I_{SA} y I_{SB}). Nodo V nodo de referencia con un potencial igual a 0V ($V_V = 0V$)

cuentran balanceadas. El valor de $-2.331 \cdot 10^{-15}$, es el resultado de los errores del redondeo de la ejecución de las operaciones matemáticas.

$$0 \approx V_{rama}^T \cdot I_{rama} = -2.33115 \cdot 10^{-15} \quad (21)$$

Este resultado indica consistencia entre los datos. Igualmente se aplicó como prueba de los resultados el análisis nodal.

5. Análisis nodal

El análisis nodal se recomienda en general para el cálculo de voltajes y corrientes en circuitos no planos. Para calcular los voltajes y las corrientes del circuito en Figura 1 según el análisis nodal primero hay que convertir las fuentes de voltaje (V_{SA} y V_{SB}) en las ramas f y h en fuentes de corriente (I_{SA} y I_{SB}) de acuerdo con el teorema de Mayer y Norton (Ver Anexo 4).

El esquema eléctrico de la Figura 1 se transforma en el esquema eléctrico equivalente de la Figura 6 con dos fuentes de corriente.

Para este esquema eléctrico se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff para los nodos independientes respectivamente los nodos (I, II, III, IV). Las corrientes que salen del nodo se consideran como positivo y las corrientes que entran en el nodo como negativo. El nodo V es el nodo de referencia con $V_V = 0V$.

$$\begin{aligned} I: \quad 0 &= I_a - I_d - I_f - I_g - I_{SA} \\ II: \quad 0 &= I_g + I_b - I_h - I_j + I_{SB} \\ III: \quad 0 &= I_j + I_f + I_c - I_i + I_{SA} \\ IV: \quad 0 &= I_d + I_e + I_h + I_i - I_{SB} \end{aligned} \quad (22)$$

Las relaciones entre las corrientes de rama y los voltajes de nodo se presentan en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 I_{R_a} &= G_a \cdot V_a = G_a \cdot (V_I - V_{IV}) \\
 I_{R_b} &= G_b \cdot V_b = G_b \cdot (V_{II} - V_{IV}) \\
 I_{R_c} &= G_c \cdot V_c = G_c \cdot (V_{III} - V_{IV}) \\
 I_{R_e} &= G_e \cdot V_e = G_e \cdot (V_{IV} - V_{IV}) \\
 I_{R_d} &= G_d \cdot V_d = G_d \cdot (V_{IV} - V_{IV}) \\
 I_{R_f} &= G_f \cdot V_f = G_f \cdot (V_{III} - V_{IV}) \\
 I_{R_g} &= G_g \cdot V_g = G_g \cdot (V_{II} - V_{IV}) \\
 I_{R_h} &= G_h \cdot V_h = G_h \cdot (V_{IV} - V_{IV}) \\
 I_{R_j} &= G_j \cdot V_j = G_j \cdot (V_{III} - V_{IV}) \\
 I_{R_i} &= G_i \cdot V_i = G_i \cdot (V_{IV} - V_{IV})
 \end{aligned} \tag{23}$$

Sustituyendo las corrientes de rama en (23) por las relaciones (22) se puede expresar (24) en forma matricial.

$$I_N = G_N \cdot V_N \tag{24}$$

donde

$$I_N = \begin{bmatrix} I_{S_A} \\ -I_{S_B} \\ -I_{S_A} \\ I_{S_B} \end{bmatrix} \quad V_N = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \\ V_{IV} \end{bmatrix}$$

$$G_N = \begin{bmatrix} G_I & -G_g & -G_f & -G_d \\ -G_g & G_{II} & -G_j & -G_h \\ -G_f & -G_j & G_{III} & -G_i \\ -G_d & -G_h & -G_i & G_{IV} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 G_I &= G_a + G_f + G_d + G_g \\
 G_{II} &= G_b + G_j + G_h + G_g \\
 G_{III} &= G_c + G_f + G_j + G_i \\
 G_{IV} &= G_e + G_h + G_d + G_i
 \end{aligned}$$

El cálculo de los voltajes de nodo se realiza invirtiendo la matriz de conductancia de nodo (G_N) y multiplicarla con el vector de corrientes de nodo (I_N).

$$V_N = G_N^{-1} \cdot I_N \tag{25}$$

Los voltajes y corrientes de ramas (V_{ra}, I_{ra}) se calculan mediante de las ecuaciones (22) considerando las fuentes de corrientes en las ramas f y h de acuerdo con la Figura 6.

6. Resultados del análisis nodal

Aplicando los valores de la ecuación (16) se obtiene el vector de las fuentes de corriente (I_N) y la matriz de conductancia (G_N).

$$I_N = \begin{bmatrix} 0.83333 \\ -0.87500 \\ -0.83333 \\ 0.87500 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$G_N = \begin{bmatrix} 1.5095 & -0.1428 & -0.1667 & -0.2000 \\ -0.1428 & 0.8789 & -0.1111 & -0.1250 \\ -0.1666 & -0.1111 & 0.7111 & -0.1000 \\ -0.2000 & -0.1250 & -0.1000 & 0.6750 \end{bmatrix}$$

El valor del determinante de la matriz $G_N \det(G_N) = 0.5232$ confirma que el sistema de ecuaciones es independiente y que la matriz G_N es invertible. El valor del número de condición de 3.6748 nos indica que se puede utilizar los métodos estándar para la inversión de la matriz G_N . De esta manera se realiza el cálculo del vector de los voltajes de nodo (V_N).

$$V_N = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \\ V_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50394 \\ -0.88363 \\ -1.03308 \\ 1.12893 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Estableciendo las relaciones entre los voltajes de rama y los voltajes de nodo (23) se calculan los voltajes de rama (V_{rama}), que corresponden en ese caso a los voltajes a través de las resistencias de las ramas ($V_{R_{ra}}$).

$$V_{rama} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_e \\ V_d \\ V_f \\ V_g \\ V_h \\ V_j \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{II} \\ V_{III} \\ V_{IV} \\ V_{IV} - V_I \\ V_{III} - V_I \\ V_{II} - V_I \\ V_{IV} - V_{II} \\ V_{III} - V_{II} \\ V_{IV} - V_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50394 \\ -0.88363 \\ -1.03308 \\ 1.12893 \\ 0.62499 \\ -1.53701 \\ -1.38756 \\ 2.01255 \\ -0.14945 \\ 2.16200 \end{bmatrix} \text{ V} \quad (28)$$

Con las relaciones entre los voltajes de rama y las corrientes de rama (22) obtenemos (29).

$$I_{rama} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_e \\ I_d \\ I_f \\ I_g \\ I_h \\ I_j \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{R_a} \\ I_{R_b} \\ I_{R_c} \\ I_{R_e} \\ I_{R_d} \\ I_{R_f} + I_{S_A} \\ I_{R_g} \\ I_{R_h} - I_{S_B} \\ I_{R_j} \\ I_{R_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.503939 \\ -0.441813 \\ -0.344358 \\ 0.282232 \\ 0.124998 \\ 0.577164 \\ -0.198223 \\ -0.623431 \\ -0.016606 \\ 0.216200 \end{bmatrix} \text{ A} \quad (29)$$

El resultado de la multiplicación escalar de los vectores de voltaje y corrientes de ramas de $-5.551 \cdot 10^{-16}$, es el resultado de los errores del redondeo de la ejecución de las operaciones matemáticas.

$$0 \approx V_{rama}^T \cdot I_{rama} = -5.551 \cdot 10^{-16} \quad (30)$$

Como las potencias en las ramas están balanceadas, ese resultado nos indica una consistencia entre los datos. Los resultados del análisis de malla (19, 20) y los resultados del análisis nodal (28, 29) son idénticos con una exactitud de 6 dígitos.

7. Discusión

La aplicación del análisis de malla para circuitos no planos fue desarrollada y demostrada en este documento. Utilizando un ejemplo el circuito no plano representado en la Figura 1 donde los voltajes y las corrientes de rama obtenidos a partir del análisis de malla y del análisis nodal fueron comparados con una exactitud de 6 dígitos. Igualmente, la consistencia de los resultados fue validado aplicando el teorema de Weyl y Tellegen. En esa sección se profundizará sobre las razones por las cuales los métodos del "Análisis de malla por inspección" presentados en [3, 4, 16, 17] no puede ser aplicados para circuitos no planos.

Analizamos la matriz de resistencia R_M . Los cálculos presentados en las ecuaciones (9, 10, 11, 12, 13, 14) resultan en que todos los valores de la diagonal (R_{nn}) de la matriz (R_M) son positivos y los valores externos de la diagonal, las resistencias comunes o mutuales (R_{nm}), son igual a 0, positivos o negativos. El protocolo del análisis de malla por inspección según [3, 4, 16, 17] resulta en valores negativos o valores igual a 0. Ese protocolo, es similar al protocolo utilizado para la determinación de los valores de la matriz de conductancia (G_N), y no permite valores mutuales positivos [3, 4, 16, 17]. Es la principal razón por la que este método no puede aplicarse para la resolución de circuitos no planos. El método formal presentado en la sección 2, define las resis-

	$R_a \rightarrow$	$R_b \rightarrow$	$R_c \rightarrow$	$R_e \rightarrow$
I_I	\rightarrow			\leftarrow
I_{II}	\rightarrow		\leftarrow	
I_{III}	\rightarrow	\leftarrow		
I_{IV}		\rightarrow		\leftarrow
I_V		\rightarrow	\leftarrow	
I_{VI}			\rightarrow	\leftarrow

Tabla 3. Tabla con los sentidos de las corrientes de las mallas ($I_I, I_{II}, I_{III}, I_{IV}, I_V, I_{VI}$) a través de las resistencias comunes que pertenecen a diferentes mallas (R_a, R_b, R_c y R_e) en relación con el sentido de la rama

tencias comunes o mutuales dependiendo de las direcciones de las corrientes de malla a través de la resistencia común o mutual. La Tabla 3 presenta en forma grafica las direcciones de las corrientes de malla a través de las resistencias comunes (o mutuales) R_{nm} .

En la Tabla 3 se identifica rápido que el sentido de todas las corrientes de malla, que fluyen a través de R_a , tienen la misma dirección. Todas las corrientes de malla que fluyen en la misma dirección generan un voltaje a través de la resistencia R_a en la misma dirección. Se suman. Entonces los valores de estas resistencias comunes en la matriz de resistencia R_M son positivos. En la Tabla 3 se identifica también que todas las corrientes de malla a través de la resistencia R_e fluyen en la misma dirección. También las corrientes de malla I_{IV} e I_V a través de la resistencia R_b y las corrientes de malla I_{II} y I_V a través de la resistencia R_c . Entonces el signo de las siguientes resistencias comunes es positivo, $R_{14} = R_{41} = R_{16} = R_{16} = R_e$, $R_{64} = R_{46} = R_e$, $R_{45} = R_{54} = R_b$ y $R_{25} = R_{52} = R_c$. Además, en la Tabla 3 se identifica rápido que a través de la resistencia R_b las corrientes de malla I_{III} e I_{IV} e I_{III} y I_V fluyen en la dirección opuesta. Estas corrientes de malla generan un voltaje a través de la resistencia R_b con la dirección opuesta. Se compensan en relación con las intensidades de las corrientes de malla correspondientes. Como consecuencia los valores de estas resistencias comunes o mutuales en la matriz de resistencia R_M son negativos ($R_{34} = R_{43} = R_{35} = R_{53} = -R_b$). Como las corrientes de la malla I_{II} e I_V e I_{II} e I_{VI} fluyen a través de la resistencia R_c en la dirección opuesta, el signo de estas resistencias comunes o mutuales es negativo ($R_{26} = R_{62} = R_{56} = R_{65} = -R_c$).

El protocolo del análisis de malla de un circuito plano de acuerdo con [3, 4, 16, 17] determina las corrientes en las mallas independientes en el sentido de las manecillas del reloj. Si las mallas independientes no incluyen otras mallas, que es un requisito para utilizar este método, las corrientes de malla fluyen a través de las resistencias comunes (mutuales) de la dirección opuesta. Por eso los valores externos de la diagonal, los

valores mutuales, son negativos o si no hay resistencias comunes igual a 0.

Para la aplicación del análisis del nodo hay que convertir las fuentes de voltaje en fuentes de corriente equivalente. Aunque los esquemas equivalentes de las fuentes de voltaje y corriente tienen el mismo comportamiento en relación a sus terminales, la distribución de los voltajes y las corrientes dentro del circuito equivalente en el mismo modo de operación puede ser diferente (Ver Anexo 4). Al calcular las corrientes y voltajes de un circuito eléctrico no plano con fuentes de voltaje, utilizando el análisis nodal para realizar el cálculo se debe reconvertir las fuentes de corriente en fuentes de voltaje. La ventaja de utilizar el análisis de malla radica en que se puede aplicar para un circuito no plano con fuentes de voltaje directo y no requiere convertir las fuentes.

Cabe mencionar, que la solución del sistema de ecuaciones independientes depende de las características numéricas, indicadas por el número de condición. Si este valor es cerca de 1 se puede aplicar la regla de Cramer o la eliminación de Gauß. Si el sistema se encuentra mal condicionado otros métodos con características numéricas que permiten la solución, como la ortogonalización de Gram-Schmidt o la transformación de Householder serán necesarios.

8. Conclusión

Durante el análisis realizado se demuestra que el cálculo de los valores del voltaje y de corriente en las diferentes ramas del un circuito eléctrico no plano, realizados con el análisis de malla y el análisis nodal son los mismos. Al aplicar la prueba con el teorema de Weyl y Tellegen los resultados obtenidos son consistentes.

Asumir que el análisis de malla no puede utilizarse en forma general como en el caso del análisis nodal no es correcto. El método "Análisis de malla por inspección" presentado en [3, 4, 16, 17, 21] asume que los sentidos de las corrientes de

malla a través de las resistencias comunes respectivamente mutuales son opuestos. Las restricciones de este método no simplifican sino complican el análisis de malla. Por que requiere la prueba adicional, si el circuito es plano. Hay que resumir que las restricciones del análisis de malla por inspección de acuerdo con [3, 4, 16, 17, 21] complican y limitan la aplicación.

Se demostró la factibilidad del algoritmo "Análisis de malla" usando el árbol completo para circuitos no planos. Este método no requiere realizar la prueba, si el circuito es plano o no.

Los resultados del artículo devuelven al análisis de malla su validez general y permiten a los diseñadores de sistemas de multisensores como protecciones para sistemas de potencia o biosensores inteligentes, basados en circuitos eléctricos equivalentes de estructuras tridimensionales, seleccionar el método de cálculo óptimo con un mínimo esfuerzo de cálculo maximizando la estabilidad y exactitud numérica. ■■

Ver los Anexos en página 68 y siguientes

Referencias

- [1] I. Bronshtein, K. Semendiaev, Manual de matemáticas, Mir, Moscou, 2a ed. 1973
- [2] K. Brandt Petersen, M. Syskind Petersen, The matrix cookbook, <http://thematrixcookbook.com>, 2012
- [3] W. Hayt, J. Kemmerly, Análisis de Circuitos en Ingeniería, McGraw Hill, 6va ed., 2012
- [4] C. K. Matthew, N. O. Sadiku, Fundamentos de Circuitos Eléctricos, McGraw Hill, 5ta ed., 2010 y 6ta ed., 2020
- [5] E. Phillippov, Taschenbuch der Elektrotechnik, VEB Verlag Technik, Berlin, 1982
- [6] K. Lunze, Einführung in die Elektrotechnik, Lehrbuch, VEB Verlag Technik Berlin, 1985
- [7] R. Schwarz, Analyse nichtlinearer Netzwerke im erweiterten Zustandsraum, Oldenbourg 1989
- [8] T. Rathore, Identifying the Loops in Mesh Analysis, IETE, 2015
- [9] A. Yildiz, Generalized Method Based on Nodal and Mesh Analysis for Computation of Time Constants of Linear Circuits CMES, 2015
- [10] G. Chatzarakis, M. Tortoreli, A. Tziolas, Fundamental Loop-Current Method Using "Virtual Voltage Sources" Technique for Special Cases, International Journal of Electrical Engineering Education, Taylor & Francis 2010
- [11] P. Drude, Zur Elektronentheorie der Metalle, Annalen der Physik, 1900, pp. 566-613
- [12] A. Sommerfeld, H. Bethe, Elektronentheorie der Metalle. In: Handbuch der Physik. Vol. 24-2. Springer Verlag, Heidelberg 1933, S. 333-622
- [13] H. F. Mayer, "Über das Ersatzschema der Verstärkerröhre". Telegraphen- und Fernsprech-Technik, 15:335-337, 1926.
- [14] E. L. Norton, Design of finite networks for uniform frequency characteristic. Technical Report (Informe interno) TM26-0-1860, Bell Laboratories, 1926
- [15] B. D. H. Tellegen, "A general network theorem, with applications," Philips Res. Rept., vol. 7, pp. 259-269, 1952
- [16] M. Sarma, Introduction to Electrical Engineering, Oxford University Press, 2001
- [17] J. Gottling, Node and Mesh Analysis by Inspection, IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION, 1995
- [18] J. Edminster, M. Nahvi, Electric circuits, Schaum's Electronic Tutor, 3. Edition, 1997
- [19] H. Helmholtz, Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierischelektrischen Versuche, Annalen der Physik und Chemie, vol. 89, no. 6, pp. 211-233, 1853.
- [20] L. Thévenin, Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique, C. R. des Séances de l'Académie des Sciences, vol. 97, pp. 159-161, 1883.
- [21] J. Vlach, Computer methods for circuit design analysis and design, Springer, 1983
- [22] J. Nilsson, S. Riedel, Electric Circuits, Pearson, 10ta ed., 2015
- [23] G. Kirchhoff, Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige (vom Studiosus Kirchhoff), Annalen der Physik und Chemie, 1845
- [24] Dunnington, W., Gauss – Titan of Science. American Mathematical Society, 2004.
- [25] H. Weyl, Repartición de corriente en una red conductora. (Rev. Mat. Hispano-Americana, 5: 153-164, 1923.

ANEXOS

Anexo 1. La conservación de cargas y la ley de corrientes de Kirchoff

La ley de corrientes de Kirchoff esta basada en la conservación de masas respectivamente en la conservación de cargas. Esta ley establece que la suma de cargas ($\sum Q_n$) que entran (Q_e) en un nodo, una región o área cerrada tiene que ser igual a la suma de las cargas ($\sum Q_m$) que salen (Q_s) de ese nodo, región o área cerrada.

$$Q_e = \sum_n Q_n = \sum_m Q_m = Q_s \quad (A.1.1)$$

Figura A1.1 muestra una parte de un circuito eléctrico alrededor de un nodo, donde se encuentran 5 ramas. Las corrientes I_1, I_3 y I_4 salen del nodo y las corrientes I_2 y I_5 entran en el nodo.

Recordando que para cuantificar la intensidad de corriente en un conductor se cuentan las cargas (Q) que pasan por una área en un intervalo de tiempo Δt .

En la Figura A1.2 fluyen cargas positivas Q a través del área de acuerdo con la definición técnica de la dirección de la corriente eléctrica desde el polo positivo hacia el polo negativo. El conductor puede ser un tubo con un líquido donde se encuentren cargas positivas. En un conductor de cobre fluyen los electrones en la dirección opuesta. El conjunto de las cargas que pasan el área en el tiempo Δt se denomina con el variable ΔQ .

La corriente eléctrica I es el cociente de la cantidad de cargas ΔQ entre el intervalo de tiempo Δt . Considerando un intervalo de tiempo infinitesimal

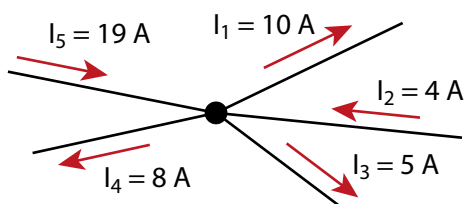


Figura A1.1. Nodo con 5 ramas

pequeño (dt) se obtiene la formula A1.3 para el cálculo de la corriente eléctrica I .

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow dt \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad (A1.3)$$

Aplicando la diferenciación a la ecuación A1.1 se obtiene:

$$\frac{d}{dt} Q_e = \frac{d}{dt} \sum_n Q_n = \frac{d}{dt} Q_s = \frac{d}{dt} \sum_m Q_m \quad (A1.4)$$

Ejecutando la derivación de las sumas por cada elemento de las sumas se obtiene A1.5.

$$\sum_n \frac{d}{dt} Q_n = \sum_m \frac{d}{dt} Q_m \quad (A1.5)$$

Como la derivada de la cantidad de cargas según el tiempo corresponde a la corriente eléctrica se obtiene la formula A1.6.

$$\sum_n I_n = \sum_m I_m \quad (A1.6)$$

La suma de las corrientes que salen del nodo en Figura A1.1 (I_1, I_3, I_4) esta igual a la suma de las corrientes que entran en el nodo (I_2, I_5).

$$I_2 + I_5 = I_1 + I_3 + I_4 \quad (A1.7)$$

Reordenando la ecuación A1.7 a la forma de la ecuación A1.8 podemos ver, que finalmente, se establece en la ecuación A1.8 que las corrientes que salen del nodo (I_1, I_3, I_4) son positivas y las corrientes que entran en el nodo (I_2, I_5) son negativas.

$$0 = I_1 + I_3 + I_4 - I_2 - I_5 \quad (A1.7)$$

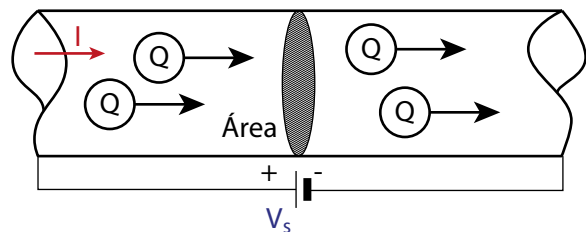


Figura A1.2. Definición técnica de la corriente eléctrica y su dirección técnica en un conductor eléctrico conectado a una fuente de voltaje V_s .

En la ecuación A1.9 se obtiene la famosa ley de corrientes que formuló Gustav Kirchhoff en el año 1845 [23].

$$0 = \sum_{k} I_k \quad (A1.9)$$

Sin embargo, cabe destacar que Carl Friedrich Gauß creó esta relación en forma general en el año 1833 [24]. La ley de corrientes establecida por Kirchhoff, se aplica en el análisis nodal donde se forman las ecuaciones de las corrientes que entran y salen del circuito según A1.9 por cada nodo. El análisis calcula los voltajes en los nodos (V_N) independientes. Para obtener la relación entre las corrientes inyectadas, que se agrupa en un solo vector, el vector de corrientes de nodo I_N y los voltajes de nodo (V_N), hay que sustituir las corrientes de rama I_{rama} por su relación con los voltajes de rama V_{rama} según la ley de Ohm en su forma de conductividad ($I_{rama} = G_{rama} \cdot V_{rama}$). Por razones de la independencia de las ecuaciones de cada nodo no podemos considerar tantas ecuaciones como nodos tenemos. Se considera una ecuación menos que nodos tiene el circuito. El nodo no considerado en la ecuación es el nodo de referencia con un potencial de 0 V. Todos voltajes de nodo se miden en relación al nodo de referencia.

Anexo 2. La conservación de energía y la ley de voltajes de Kirchhoff

El movimiento de electrones en los metales influenciados por un campo eléctrico externo produce calor y aumenta su temperatura. Los electrones en la banda de conducción de los metales se mueven también en ausencia de un campo eléctrico externo y se golpean entre ellos, ganando y perdiendo energía. Se considera que el tiempo promedio entre 2 golpes es alrededor de $\tau = 25$ fs. Ese movimiento de los electrones es conocido como el movimiento browniano con una velocidad promedio de $10^6 \dots 10^7$ m/s en el metal. De esta forma el metal conductor mantiene su estado macroscópico de energía. Varios modelos

matemáticos explican la relación entre la velocidad de los electrones en la banda de conducción de los metales y el campo eléctrico. Para comprender las relaciones microscópicas entre la velocidad de deriva de los electrones (v_D), la intensidad del campo eléctrico, E , y la conductividad del material (κ) se puede usar el modelo de Drude. Este modelo introduce un término de fricción [11]. En el estado estacionario se obtienen las siguientes fórmulas.

$$v_D = -\frac{e \cdot E \cdot \tau}{m} \quad \kappa = \frac{e^2 \cdot n_e \cdot \tau}{m} \quad (A2.1)$$

donde

- » e : carga elemental
- » E : intensidad del campo eléctrico
- » τ : tiempo promedio entre 2 golpes
- » m : masa de electrón
- » n_e : densidad de electrones

La velocidad de deriva de los electrones en un metal causado por un campo eléctrico externo tiene un valor aproximado de 0.4 mm/s. Con el modelo de Drude [11] se calculan las conductividades y se obtienen valores alrededor de mil veces más grande que la conductividad real. Modelos, más sofisticados fueron desarrollados por Lorentz y Sommerfeld. Considerando que no todos electrones contribuyen al movimiento resultante, dicho al flujo de electrones respectivamente a la conductividad. Solo estos con un nivel igual o mayor que la energía de Fermi [12]. En todos estos procesos se cumple la ley de conservación de energía. La cantidad de energía que acelera los electrones y calienta finalmente el conductor, tiene que ser suministrada por el campo eléctrico externo. Macroscópicamente se puede analizar el balance entre la energía suministrada y la energía disipada.

La ley de voltajes de Kirchhoff es basada en la conservación de energía. Esta ley establece que la suma de la energía suministrada respectiva-

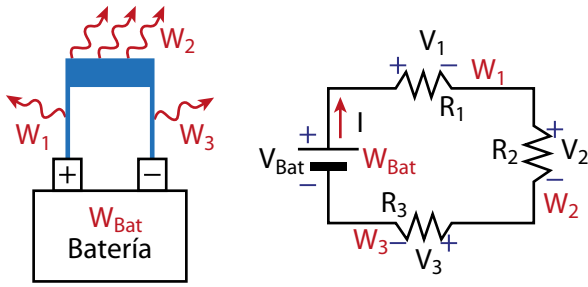


Figura A2.1. Circuito eléctrico con una fuente de energía, la batería y tres resistencias convirtiendo la energía eléctrica en calor.

mente generada (W_g) tiene ser igual a la suma de la energía consumida (W_c).

$$\sum W_g = \sum W_c \quad (A2.2)$$

Por ejemplo, este modelo se aplica a un circuito eléctrico que consiste en una batería, la cual suministra la energía $W_g = W_{Bat}$ a 3 diferentes resistencias, representando 2 conductores de cobre (ida y vuelta, R_1 y R_3) y un calentador (R_2). La Figura A2.1 muestra el esquema eléctrico correspondiente.

La corriente a través de las resistencias R_1 , R_2 y R_3 convierte según la ley de Joule y Lenz un parte de su energía en calor, medible por su aumento de temperatura. Así las 3 resistencias consumen las energías W_1 , W_2 , W_3 convirtiendo la energía eléctrica suministrada por la batería W_{Bat} en calor. Macroscópicamente se puede establecer la ecuación (A2.2).

$$W_{Bat} = W_g = W_c = W_1 + W_2 + W_3 \quad (A2.2)$$

Es importante recordar la relación existente entre energía, fuerza, la intensidad del campo eléctrico y la carga, si la fuerza tiene la misma dirección como el campo eléctrico.

La intensidad del campo eléctrico E genera una fuerza F sobre una carga q de la misma manera, como la gravitación g genera una fuerza F sobre masa m , $F = g \cdot m$

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q \quad (A2.3)$$

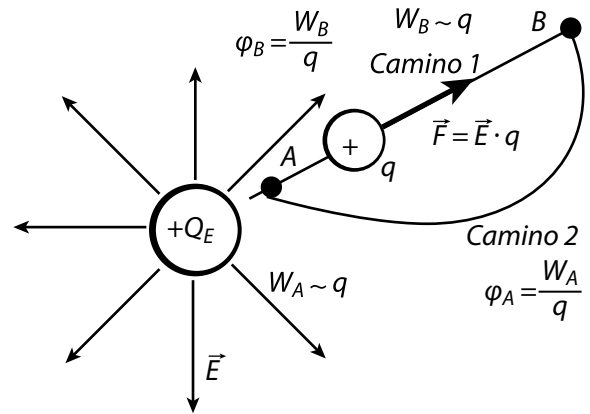


Figura A2.2. Relación entre la intensidad del campo eléctrico E generado por la carga $+Q_E$, la carga q , la fuerza F , que actúa a la carga q , la energía en diferentes puntos como A y B y los potenciales en estos puntos

La Figura A2.2 ilustra las relaciones entre el campo eléctrico, fuerzas y potenciales.

Cuando una fuerza desplaza una carga eléctrica q una determinada distancia infinitesimalmente pequeño ds , se realiza un trabajo dW .

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.4)$$

Cuando se desplaza una carga eléctrica q en el campo eléctrico desde el punto A hacia B, se realiza el trabajo W_{AB}

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.5)$$

En un campo conservativo, como el campo eléctrico, esa integral entre dos puntos no depende del camino. La carga puede ser desplazada desde el punto A hacia el punto B por camino 1 o el camino 2 el trabajo W_{AB} es el mismo. El cociente del trabajo W_{AB} entre la carga corresponde a la integral de línea de la intensidad del campo eléctrico que se denomina voltaje.

$$\frac{W_{AB}}{q} = \frac{q \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = V_{AB} \quad (A2.6)$$

El voltaje V_{AB} es la capacidad de realizar trabajo por carga entre los puntos A y B en el campo eléctrico. Se puede determinar la energía que

una carga q puede convertir en energía cinética entre los puntos A y B.

El cociente de la energía entre la carga se denomina el potencial eléctrico ϕ . El potencial es igual a la integral de línea de la intensidad del campo eléctrico entre un punto (A o B) y el punto infinitamente alejado de la carga Q (∞) donde el potencial es cero (ver Fig. A2.2). El potencial ϕ_{P_A} en el punto A y el potencial ϕ_{P_B} en el punto B corresponde la capacidad de realizar trabajo por carga. El potencial indica la energía por carga un punto que se puede convertir en otra forma de energía.

$$\phi_A = \frac{W_A}{q} = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.7)$$

$$\phi_B = \frac{W_B}{q} = \int_B^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

La diferencia de los potenciales eléctricos ϕ_A y ϕ_B entre los puntos A y B es el voltaje V_{AB} .

$$V_{AB} = \phi_A - \phi_B = \frac{W_A}{q} - \frac{W_B}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.8)$$

La diferencia de los potenciales eléctricos ϕ_B y ϕ_A entre los puntos B y A es el voltaje V_{BA} .

$$V_{BA} = \phi_B - \phi_A = \frac{W_B}{q} - \frac{W_A}{q} = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.9)$$

La ecuación A2.10 representa la relación entre la carga, $q = Q$, el voltaje y la energía respectivamente trabajo.

$$W_{AB} = V_{AB} \cdot Q \quad (A2.10)$$

La derivada del trabajo es la potencia P .

$$\frac{d}{dt} W = P = V_{AB} \cdot \frac{d}{dt} Q = V_{AB} \cdot I \quad (A2.11)$$

Aplicando la derivación (A1.3) a la formula A2.1 obtenemos:

$$P_{Bat} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (A2.12)$$

Sustituyendo la potencia por el producto de los voltajes que caen a través de las resistencias con

la corriente, que fluye a través de las resistencias según (A2.7) obtenemos (A2.13).

$$V_{Bat} \cdot I = V_1 \cdot I + V_2 \cdot I + V_3 \cdot I \quad (A2.13)$$

En este circuito fluye a través de todos elementos la misma corriente. Nosotros denominamos esa trayectoria cerrada en el circuito eléctrico donde fluye la corriente como malla. Una malla puede incluir un elemento solo una vez. Cuando fluye en este circuito o en esta malla una corriente $I \neq 0$ podemos dividir (A2.13) entre I y obtenemos la conocida ley de voltajes de Kirchhoff [23].

$$V_{Bat} = V_1 + V_2 + V_3 \quad (A2.14)$$

La suma algebraica de los voltajes, en la trayectoria cerrada de un circuito, tiene que ser 0 y se mantiene el balance de las energías suministradas y consumidas.

$$0 = \sum_k V_k \quad (A2.15)$$

Los voltajes se suman dependiendo de su dirección en relación con el sentido de la corriente en la malla. Si las dos direcciones son iguales, el signo del voltaje es positivo y si son opuestas el signo es negativo.

Esta ley se aplica en el análisis de malla, donde se consideran las ecuaciones con los voltajes que caen a través de los diferentes elementos del circuito. Para determinar el balance se definen mallas independientes en el circuito, donde fluye una corriente de malla a través de los elementos de la malla. Diferentes autores distinguen entre mallas, lazos y bucles, dependiendo de si la trayectoria (malla, lazo o bucle) es plana o incluye otras trayectorias cerradas. Con el método descrito no es necesario distinguir entre mallas, lazos o bucles. La dirección de la corriente de malla define el sentido en que los voltajes se deben tomar en cuenta y como deben ser sumados. Este sentido se denomina también como sentido de la malla. Si el voltaje cae en el sentido de la malla el valor en la ecuación es positivo, si es opuesta el valor en la ecuación es negativo.

Para extender la validez de la ley de voltajes de Kirchhoff a geometrías tridimensionales, hay relacionar esta ley con la integral de línea cerrada en un campo conservativo, que tiene que ser igual a cero. Esta integral se utiliza en forma de A2.16 para la determinación de condiciones de frontera del campo eléctrico entre dos materiales diferentes.

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.16)$$

La ley esta basada en la conservación de energía. Cuando se desplaza una carga q en un campo eléctrico E desde el punto A hacia el punto B, se realiza el trabajo W_{AB} . El trabajo que realiza la carga q es independiente del camino de la carga (camino 1 o camino 2). Para desplazar la carga q desde el punto B hacia el punto A hay que invertir el trabajo W_{BA} . (ver Figura 2.2) Las cantidades de los trabajos W_{AB} y W_{BA} son iguales con signo opuesta porque los vectores \vec{E} y $d\vec{s}$ tienen en los diferentes caminos diferentes direcciones.

$$W_{AB} = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.17)$$

$$W_{BA} = \int_B^A q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Cuando la carga se desplaza desde el punto A hacia B en el camino 1 ($A \rightarrow B$), las direcciones de los vectores \vec{E} y $d\vec{s}$ tienen en las mismas direcciones y el trabajo tiene un signo positivo. Cuando la carga se desplaza desde el punto B hacia A en el camino 1 ($B \rightarrow A$) las direcciones de los vectores \vec{E} y $d\vec{s}$ tienen en las direcciones opuestas y el trabajo tiene un signo negativo. Por eso la suma de ambos trabajos (W_{AB} y W_{BA}) tiene que ser cero.

$$0 = W_{AB} + W_{BA} = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_B^A q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.18)$$

En un campo eléctrico la suma A2.18 tiene que ser también cero, cuando la carga se desplaza desde punto A hacia B tomando el camino 1 ($A \rightarrow B$) y se desde el punto B hacia A tomando el camino 2 ($B \rightarrow A$).

Despejando la carga q se obtiene la siguiente ecuación.

$$0 = q \cdot \left(\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) \quad (A2.19)$$

La primera integral en la ecuación (A2.16) representa el voltaje V_{AB} entre los puntos A y B (ver ecuación A2.8) y la segunda integral el voltaje V_{BA} entre los puntos B y A (ver ecuación A2.9).

$$V_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (A2.20)$$

$$V_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

La diferencia entre los potenciales de los puntos A y B es el voltaje V_{AB} y la diferencia entre los potenciales de los puntos B y A es el voltaje V_{BA} .

La suma algebraica de las integrales en A2.19 representa una integral de línea cerrada con el valor de 0 igual como la ecuación A2.16. Usando las ecuaciones A2.20 obtenemos la prueba de que la integral cerrada es cero.

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 0 = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ 0 &= V_{AB} + V_{BA} \\ 0 &= \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_A \end{aligned} \quad (A2.21)$$

En general obtenemos la ecuación A2.22. La validez de la relación entre la integral de línea cerrada y la suma algebraica de voltajes no esta limitado solo a configuraciones o geometrías planas.

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_k V_k \quad (A2.22)$$

La relación A2.22 es valida para circuitos eléctricos con geometría tridimensional. Si al establecer las ecuaciones del circuito, se consideran todas las fuentes y acoplamientos que pueden generar una caída de voltaje en las mallas de un circuito, entonces se puede usar la ley de voltajes de Kirchhoff en forma del análisis de malla para cualquier circuito eléctrico con cualquier geometría en el espacio.

Anexo 3. El teorema de Teorema de Weyl y Tellegen

El teorema de Teorema de Weyl y Tellegen es una formulación de la conservación de energía en forma instantáneo por las potencias. Se establece que la suma de las potencias en todas las ramas es igual a cero [15].

$$0 = \sum_n P_{rama_n} = \sum_n V_{rama_n} \cdot I_{rama_n} \quad (A3.1)$$

El índice n representa el numero de la rama n (con $n \in [1 \dots N_{rama}]$). Se puede calcular la suma de las potencias en las ramas del circuito usando el vector de las corrientes de rama (I_{rama}) y el vector de los voltajes de rama (V_{rama}).

$$0 = V_{rama}^T \cdot I_{rama} = I_{rama}^T \cdot V_{rama} \quad (A3.2)$$

El signo negativo de la potencia de una rama indica que esta rama suministra energía al circuito y un signo positivo indica que esta rama consume energía. Estos cálculos también se refieren al balance de las potencias y son utilizados como estándar para la verificación del cálculo de corrientes y voltajes de circuitos. [3, 4, 5, 6]

Anexo 4. El teorema de Mayer y Norton

El teorema de Helmholtz y Thévenin establece que se puede reducir todos circuitos eléctricos hasta a un circuito activo que esta conectada a un circuito pasivo [19, 20]. El circuito activo consiste en una fuente de voltaje (V_F) y una resistencia en serie, llamada la resistencia de Thévenin (R_{Th}). El circuito pasivo consiste en una resistencia. Mayer y Norton extendieron este modelo de la manera

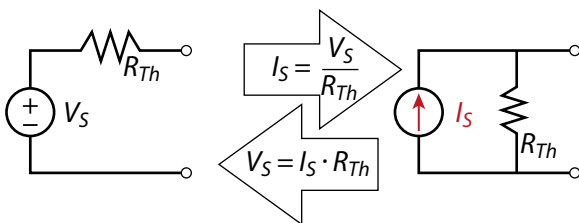


Figura A4.1. Conversión de fuentes de voltajes en fuentes de corrientes y viceversa según el teorema de Mayer y Norton

que también se puede usar fuentes de corriente (I_F) con una resistencia en paralelo para el circuito activo [13, 14]. Y se puede convertir las entre ellos con las ecuaciones A4.1.

$$I_F = \frac{V_F}{R_{th}} \quad V_F = R_{Th} \cdot I_F \quad (A4.1)$$

La Figura A4.1 muestra los circuitos equivalentes y como convertir los entre ellos viceversa aplicando las ecuaciones A4.1.

Si se convierte una fuente de voltaje V_F en una fuente de corriente I_F , la corriente I_F tiene que fluir en la misma dirección que la corriente generada por la fuente de voltaje V_F . Y por supuesto, si se convierte una fuente de corriente I_F en una fuente de voltaje V_F , el voltaje V_F tiene que caer en la misma dirección que el voltaje generado por la fuente de corriente I_F .

Como el análisis de malla requiere fuentes de voltaje hay que convertir las fuentes de corrientes en el circuito a analizar en fuentes de voltajes. Como el análisis nodal requiere fuentes de corrientes hay que convertir las fuentes de voltaje en el circuito a analizar en fuentes de corrientes.

Aunque el comportamiento de las dos fuentes equivalentes en relación a sus terminales es igual, la distribución interna de las corrientes

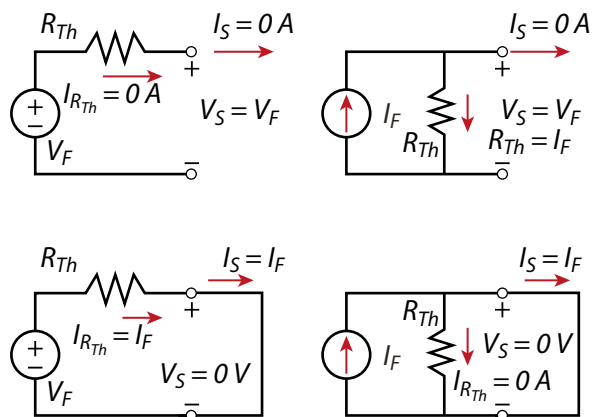


Figura A4.2. Distribución de corrientes y voltajes en fuentes de voltajes y fuentes de corrientes en los modos de operación circuito abierto y corto circuito

y los voltajes en el mismo modo de operación puede ser diferente.

En el caso del circuito abierto en una fuente de voltaje no fluye ninguna corriente ($I_{R_{Th}} = 0 A$) a través de la resistencia de Thévenin (R_{Th}). Para que entre los terminales de una fuente de corriente cae el mismo voltaje (V_p) tiene que fluir la corriente ($I_{R_{Th}} = I_p$) a través de la resistencia R_{Th} . En el modo de operación corto circuito a través de la resistencia R_{Th} de la fuente de voltaje fluye una corriente la corriente ($I_{R_{Th}} = I_p$) pero en la fuente de corriente a través de la resistencia R_{Th} no fluye ninguna corriente ($I_{R_{Th}} = 0 A$). Únicamente en el modo de máxima transferencia de potencia las dos fuentes equivalentes consumen internamente la misma cantidad de energía a través de la resistencia R_{Th} . En el modo de máxima transferencia de potencia la carga conectada a la fuente tiene el valor de la resistencia R_{Th} .

Agradecimientos

Al Dr. Félix Henríquez, Director del Centro de Investigación e Innovación Eléctrica, Mecánica y de la Industria, al Mgtr. Juan González, Decano de la Facultad de Ciencias y Tecnología, por el apoyo. A la Dra. Miryam Venegas y al Dr. Omar Cornejo por sus sugerencias. Al Ing. Daniel Sandoval de Capris Engineering, Costa Rica, por la revisión del contenido.

