

Una relación directa entre el análisis de malla y el análisis nodal

Hazlo todo tan sencillo como sea posible, pero no más. Albert Einstein

Michael Stanimirov y Lisseth Sandoval-Soto

Universidad Tecnológica de Panamá, 2022

Email: stanimirov.michael@icloud.com

Resumen

En el artículo se desarrolla un teorema fundamental de redes que pone en relación matemática directa los dos procedimientos de cálculo de circuitos eléctricos: el análisis de malla y el análisis nodal. La base es el álgebra topológica introducida por Weyl en 1927 en el cálculo de circuitos eléctricos, así como la identidad matricial de Frobenius y Schur. A través del teorema de redes, la matriz de resistencias de malla y la matriz de conductancias nodales pueden transformarse directamente entre sí mediante sus inversas. El teorema además refuta la opinión, ampliamente difundida en la literatura internacional sobre la teoría del cálculo de circuitos eléctricos, de que el análisis de malla no sería aplicable a circuitos no planos. Estos planteamientos atribuían la validez y aplicabilidad del análisis nodal por encima del análisis de malla.

Autores estadounidenses de célebros libros de texto y monografías publicados por editoriales de prestigio como Springer, Pearson, McGraw Hill e IEEE comenzaron a transferir la regla de signos del análisis nodal al análisis de malla. De este modo asignaron simplemente valores negativos a los elementos no diagonales de la matriz de resistencias, sin considerar la dirección real de las corrientes de rama en relación con la orientación de la malla conforme a Kirchhoff. Esta simplificación solo es válida para circuitos planos; formulada en términos matemáticos generales es incorrecta, pero fue adoptada con frecuencia sin revisión, reproducida, traducida y presentada como universal. El famoso aforismo de Einstein, "Hazlo todo tan simple como sea posible, pero no más simple", resulta aquí muy pertinente, dado que estos autores se ven obligados a integrar un paso adicional en el análisis de malla para evitar errores.

El ejemplo numérico de cálculo de un circuito en forma de un grafo no plano de Kuratowski K_5 respalda la demostración general con valores concretos.

Dado que el análisis nodal se basa en la conservación de la carga y el análisis de malla en la conservación de la energía, el teorema convierte sistemas de ecuaciones de conservación de carga en sistemas de conservación de energía y viceversa. Además, el teorema puede extenderse a sistemas de ecuaciones de conservación de energía y de masa, y en general a sistemas acoplados de flujo y energía. El teorema define un operador para sistemas duales como sistemas de flujos y de energías que permite transformar sus representaciones unos en otros.

El teorema de redes permite a diseñadores y analistas de circuitos eléctricos, sistemas inteligentes de sensores digitales —por ejemplo, para la protección y control de sistemas de suministro energético distribuidos—, sistemas inteligentes de biosensores o estimadores digitales basados en estructuras planos o tridimensionales, seleccionar de manera sencilla el método de cálculo óptimo con un esfuerzo computacional mínimo y la máxima estabilidad, especialmente cuando el tamaño de la red genera limitaciones numéricas.

1. Introducción

El cálculo de redes de resistencia eléctrica parece ser teóricamente completo y exhaustivo. Las corrientes y los voltajes de circuitos eléctricos se pueden calcular utilizando el análisis nodal, basado en la ley de Kirchhoff de los nodos, o el análisis de malla, basado en la ley de Kirchhoff de las mallas [1], [2]. Por razones numéricas se elige un método que conduce a una menor cantidad de ecuaciones independientes [3], [4]. También existen métodos que utilizan ambas leyes de Kirchhoff [3], [4], [5]. Los distintos procedimientos se han ampliado para su aplicación en redes lineales y no lineales, que además pueden contener inductancias, capacidades o fuentes controladas. [3]. Para ello, existen diferentes métodos en el dominio temporal o el dominio de la frecuencia, el dominio de Laplace, el dominio z o el espacio de estados [3], [5].

Aunque a primera vista el tema parece cerrado, hoy en día todavía se discuten las propiedades de las representaciones generalizadas y especiales y las aplicaciones del álgebra topológica introducida por Weyl en el cálculo de circuitos. Actualmente se están debatiendo los problemas que plantean los análisis de flujo de carga y estabilidad para las redes intercontinentales [6], [7], [8].

Estos métodos son aplicables a circuitos eléctricos conectados cuyo grafo dirigido tiene un "árbol completo". Así como exclusivamente ramas con diferentes nodos iniciales y finales. Por lo tanto, un nodo debe conectar al menos dos ramas. Y no hay ramas paralelas entre dos nodos [3], [4], [7], [8].

Numerosos autores en todo el mundo limitan la aplicación del análisis de malla a circuitos planos, es decir, sin cruces. [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Por lo tanto, introducen un paso adicional para comprobar si el circuito es plano. Los circuitos no planos se resuelven mediante el análisis nodal. Los autores de [9] incluso priorizan fundamentalmente la aplicabilidad del análisis nodal por sobre la del análisis de malla. Esta limitación es el resultado de un procedimiento especial, muy simplificado y formalizado, de análisis de malla. Este método, demasiado simplificado, utiliza las llamadas "mallas ventana", que son mallas que no encierran a otras. El método simplificado conduce, en su aplicación en circuitos tridimensionales, a signos erróneos en la así llamada matriz de resistencia. Porque los valores de resistencia de los elementos no diagonales se introducen de forma análoga al método nodal, simplemente con signo negativo. Esto contradice el análisis de malla según [3], [16], [4], que determina estos valores de resistencia como positivos o negativos en relación con la dirección de la malla y la dirección de la corriente de rama. Con una matriz de resistencia incorrecta se calculan corrientes de malla erróneas. [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Los autores, [17], exponen detalladamente las dificultades del método de las mallas, formalizado específicamente para circuitos planos con las denominadas mallas de ventana. Proponen un método modificado que, si bien presenta ciertas simetrías con respecto al método nodal, también parece igualmente complicado y no alcanza la sencillez y claridad del método original de las mallas de Kirchhoff. Los autores de [4] relacionan los sistemas de mallas completos con los sistemas de mallas fundamentales. A partir de un circuito (p.245, fig. 3.1.5. a), muestran que este grafo plano específico se opone a la búsqueda en árbol. Es cierto, porque el circuito contiene algunas ramas paralelas entre dos nodos, que pueden unirse o simplificarse en una rama de acuerdo con las reglas básicas eléctricas ¹ en la preparación topológica del circuito. Lo que los autores no mencionan y profundizan. En muchos tratados, el análisis de malla se presenta de forma incorrecta o incompleta. Otra razón más para tratar el tema en detalle. La relación matemática directa entre las inversas de la matriz de resistencia de malla y la matriz de conductancia nodal derivada en este artículo sobre la base del álgebra topológica refuta la descripción de los autores de [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] y muestra de manera general que el análisis de malla presentado a continuación se puede aplicar sin restricciones. Una razón para la generalización inexacta puede verse en la separación de la introducción de los teoremas de Kirchhoff de la física. Mientras tanto, muchos autores solo indican las ecuaciones de forma puramente matemática y no demuestran que el análisis nodal se basa en la conservación de la carga y el análisis de malla en la conservación de la energía. La literatura para la aplicación del análisis de malla para circuitos

¹Como es el cálculo de conexiones en serie y en paralelo de resistencias, las leyes de Kirchhoff [1], [2], el teorema de Mayer [18] y el teorema de Helmholtz [19].

tridimensionales es contradictoria, de aquí la necesidad de abordar este tema. También faltan en la literatura ejemplos de cálculos con circuitos no planos [3], [16], [4]. Por ello, los autores de [20] calculan un circuito no plano ejemplar mediante el análisis de malla, analizan sistemáticamente los orígenes de la generalización errónea y, finalmente, distinguen entre el análisis de malla direccional y el no direccional. Las explicaciones de este artículo se basan en el análisis de malla direccional.

En este artículo aplicamos el teorema derivado a continuación al circuito no plano representado en la figura 1 y calculamos las corrientes y los voltajes de las ramas. Las explicaciones de este artículo se basan en el análisis de malla direccional.

El grafo del circuito elegido en este artículo corresponde al grafo K_5 de Kuratowski es uno de los grafos no planos más pequeños. El grafo K_5 de Kuratowski es un grafo completo, en el que todos los nodos están conectados directamente entre sí. Con ayuda de los grafos de Kuratowski K_5 y $K_{3,3}$, según el teorema de Kuratowski se distingue entre grafos planos y no planos. Si un grafo contiene los grafos de Kuratowski K_5 o $K_{3,3}$, o ambos, entonces no es plano. El circuito de este artículo difiere marginalmente del circuito de [20]. Con el fin de generalizar, en el circuito de este artículo se ha sustituido una fuente de tensión por la fuente de corriente equivalente según Mayer ² [18], [21].

Por lo tanto, en este artículo se esperan los mismos resultados para las corrientes y voltajes calculados que en [20]. De este modo, las explicaciones de [20], [22] sirven como referencia, en la que se calcula el circuito en la figura 1 con ayuda del análisis de malla y del análisis nodal sin álgebra topológica.

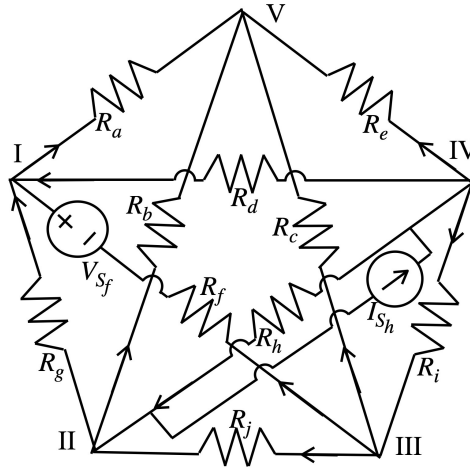


Figura 1: Circuito no plano con 5 nodos ($N_n = 5$; I, II, III, IV, V) y 10 ramas ($N_{br} = 10$; $a \dots j$), los siguientes resistencias de rama $R_{br} = [R_a \ R_b \ R_c \ R_e \ R_d \ R_f \ R_g \ R_h \ R_j \ R_i]^T = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]^T$ y las fuentes de voltaje y corriente $V_{S_f} = 5V$, $I_{S_h} = \frac{7}{8}A$

Para derivar ecuaciones compactas para el análisis de malla y el análisis nodal basados en el álgebra topológica introducida en la física por Weyl [6], primero preparamos topológicamente el circuito. Ordenar corrientes, voltajes y resistencias, así como las fuentes de corriente y voltaje, de forma adecuada en vectores y matrices [3], [18]. En cada rama, la dirección de la corriente de la rama se marca con una flecha. Esta dirección puede ser básicamente arbitraria, pero en este caso no es recomendable para un cálculo eficiente. En los siguientes pasos se determina el denominado "árbol completo", así como las ecuaciones matriciales para el análisis de malla y el análisis nodal con ayuda de las matrices topológicas, en este caso las matrices de incidencia [3]. Las matrices de incidencia contienen la información topológica sobre la ubicación de una rama en la red en relación con los nodos

²El teorema de Mayer también se conoce en los países de habla inglesa erróneamente como el teorema de Norton. Mayer lo publicó de forma concisa y sucinta en una revista de telecomunicación alemana reconocida [18], 1927. Norton, por su parte, lo describió ese mismo año en un informe interno de la empresa [21], 1927, que no se hizo público hasta por lo menos una década más tarde.

y las mallas. La matriz de incidencia de voltaje de nodos indica qué rama está conectada a qué nodo. La matriz de incidencia de corriente de malla indica qué rama se encuentra en qué malla. Con estas dos matrices topológicas, la información topológica del circuito se puede procesar algebraicamente hasta obtener la solución. En el artículo se consigue establecer las matrices topológicas de manera muy eficiente, ya que las matrices de incidencia fundamentales se pueden derivar directamente del circuito preparado topológicamente. A continuación, se desarrolla la relación directa entre las inversas de la matriz de conductancia y la matriz de resistencia utilizando la identidad matricial de Frobenius y Schur ³ [23], [24]. A continuación, el circuito se calcula numéricamente según los presentados métodos. Este método es muy eficaz desde el punto de vista didáctico, ya que ambas matrices de incidencia fundamentales se obtienen muy fácilmente, especialmente para el grafo completo de Kuratowski K_5 . Posteriormente, la aplicabilidad de la relación se amplía a matrices de incidencia no fundamentales [4].

Al final, el teorema define un operador para sistemas duales como sistemas de flujos y de energías que permite transformar sus representaciones duales unos en otros.

A continuación se utilizan leyes fundamentales, como la conservación de la energía y la carga, las leyes de Kirchhoff, el teorema de Weyl ⁴, los teoremas de Mayer y de Helmholtz ⁵ o el lema de inversión de matrices de Frobenius y Schur, sin demostración. Sin embargo, para facilitar la comprensión en este contexto, se ilustran adecuadamente algunos aspectos de las relaciones utilizadas.

2. La preparación topológica del circuito eléctrico

Para aplicar eficazmente el álgebra topológica al cálculo de circuitos eléctricos [6], conviene representar cada rama x mediante lo que se denomina una rama general [3], [4]. La rama general consta de una resistencia, R_x , así como una fuente de tensión y corriente, V_{S_x}, I_{S_x} . Si las fuentes no están presentes en la rama, simplemente se establecen en cero ($V_{S_x} = 0V, I_{S_x} = 0A$) y se introducen en los vectores correspondientes de las fuentes de corriente y tensión de los conjuntos de ecuaciones (2), (3). Si las fuentes no aparecen en la rama, simplemente se anulan ($V_{S_x} = 0, V, I_{S_x} = 0, A$) y se introducen en los vectores correspondientes a las fuentes de corriente y de voltaje de los sistemas de ecuaciones (2), (3). Este procedimiento corresponde en la solución presentada a) a la sustitución "automática" de la fuente de voltaje inexistente por un cortocircuito, así como b) a la sustitución de la fuente de corriente ausente por un circuito abierto. Ambos según la superposición de Helmholtz [19], [3], [4].

Aunque las direcciones de referencia de las flechas pueden fijarse arbitrariamente, resulta ventajoso emplear, además de un esquema estandarizado de sustitución de la rama general (x), direcciones de referencia uniformes y claramente definidas. En este caso adoptamos la convención del consumidor [3], [4].

Si las direcciones reales de las fuentes de corriente y de tensión en las ramas no coinciden con las predefinidas, sus valores se introducen con signo negativo en los vectores correspondientes.

En la figura 2 se muestra la interconexión de los elementos de una rama general. Las direcciones de referencia de las corrientes y voltajes de las ramas, así como de las fuentes de voltaje y corriente, se definen para todas las ramas como en la figura 2, en función de U_x e I_x .

Las relaciones matemáticas de la ecuación (1) entre las distintas magnitudes de las ramas se obtienen de acuerdo con las leyes de Kirchhoff de nodos y mallas, así como mediante la ley de Ohm, aplicada en el análisis de corrientes de malla en términos de resistencia y en el análisis nodal en términos de conductancia. En la ecuación (1) se emplea implícitamente la relación entre la resistencia

³La identidad matricial de Frobenius [23], 1912, y Schur [24], 1918, - los últimos representantes de la Escuela de Álgebra de Berlín -, también se conoce en los países de habla inglesa erróneamente como la identidad matricial de Woodbury. Woodbury, por su parte, la publicó en una forma diferente como 3 décadas después [25], 1949.

⁴El teorema de Weyl [6], 1927, también se conoce en algunos países erróneamente como el teorema de Tellegen. Tellegen, por su parte, lo publicó como 2 décadas después [26], 1952.

⁵El teorema de Helmholtz [19], 1853, también se conoce en algunos países erróneamente como el teorema de Thévenin. Thévenin, por su parte, lo publicó como 3 décadas después [27], 1883.

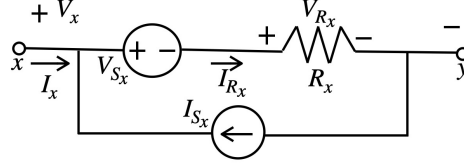


Figura 2: Rama general con resistencia (R_x), fuente de voltaje (V_{S_x}) y fuente de corriente (I_{S_x}) así como las direcciones definidas.

y la conductancia ($R_x = 1/G_x$).

$$\begin{aligned} V_x &= V_{R_x} - V_{S_x} \\ I_x &= I_{R_x} - I_{S_x} \\ V_{R_x} &= R_x \cdot I_{R_x} \\ I_{R_x} &= G_x \cdot V_{R_x} \end{aligned} \quad (1)$$

Para establecer las denominadas matrices de incidencia fundamentales, empleamos el método clásico introducido por Kirchhoff del árbol completo [4], [6], [18]. El árbol completo está formado por aquellas ramas que conectan todos los nodos sin generar circuitos cerrados, mientras que las demás ramas corresponden ramas de conexión. Kirchhoff, al determinar el número de ecuaciones independientes en ambos métodos, llegó al árbol completo suprimiendo sucesivamente ramas individuales. En la actualidad, resulta más sencillo conectar directamente todos los nodos evitando la formación de mallas. La figura 3 muestra el resultado de la preparación topológica: un grafo direccional del circuito con un árbol completo, los nodos numerados y las direcciones de referencia definidas para las corrientes y voltajes de las ramas.

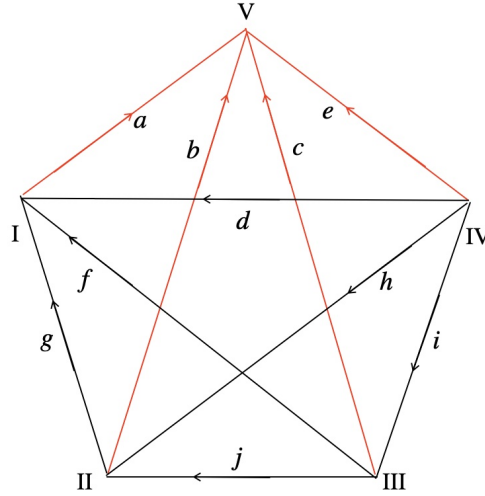


Figura 3: Circuito con las ramas del árbol (rojo: a, b, c, e) y las ramas de conexión (negro: d, f, g, h, j, i)

La figura 3 muestra la agrupación de las ramas individuales del circuito en ramas de árbol (rojo: a, b, c, e) y ramas de conexión (negro: d, f, g, h, j, i).

Basándonos en el árbol completo definido en la figura 3 y en la agrupación resultante, ordenamos las corrientes, los voltajes y las resistencias de las ramas del árbol en los siguientes vectores con los índices tr (derivado del inglés tree): vector de resistencia de la rama del árbol (r_{tr}), vector de tensión de las ramas del árbol (V_{tr}), vector de corriente de las ramas del árbol (I_{tr}), así como el vector de fuentes de tensión de las ramas del árbol ($V_{S_{tr}}$) y el vector de fuentes de corriente de las ramas del

árbol ($I_{S_{tr}}$). El conjunto de ecuaciones (2) muestra la asignación para las ramas del árbol.

$$r_{tr} = \begin{bmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \\ R_e \end{bmatrix} \quad V_{S_{tr}} = \begin{bmatrix} V_{S_a} \\ V_{S_b} \\ V_{S_c} \\ V_{S_e} \end{bmatrix} \quad I_{S_{tr}} = \begin{bmatrix} I_{S_a} \\ I_{S_b} \\ I_{S_c} \\ I_{S_e} \end{bmatrix} \quad V_{tr} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_e \end{bmatrix} \quad I_{tr} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_e \end{bmatrix} \quad (2)$$

De manera análoga, las corrientes, los voltajes y las resistencias de las ramas de conexión se agrupan en los vectores correspondientes al cotree, identificados con el subíndice ctr (del inglés cotree): el vector de resistencias del cotree (r_{ctr}), el vector de voltajes del cotree (V_{ctr}), el vector de corrientes del cotree (I_{ctr}), junto con los vectores de fuentes de voltaje ($V_{S_{ctr}}$) y de corriente ($I_{S_{ctr}}$).

$$r_{ctr} = \begin{bmatrix} R_d \\ R_f \\ R_g \\ R_h \\ R_j \\ R_i \end{bmatrix} \quad V_{S_{ctr}} = \begin{bmatrix} V_{S_d} \\ V_{S_f} \\ V_{S_g} \\ V_{S_h} \\ V_{S_j} \\ V_{S_i} \end{bmatrix} \quad I_{S_{ctr}} = \begin{bmatrix} I_{S_d} \\ I_{S_f} \\ I_{S_g} \\ I_{S_h} \\ I_{S_j} \\ I_{S_i} \end{bmatrix} \quad V_{ctr} = \begin{bmatrix} V_d \\ V_f \\ V_g \\ V_h \\ V_j \\ V_i \end{bmatrix} \quad I_{ctr} = \begin{bmatrix} I_d \\ I_f \\ I_g \\ I_h \\ I_j \\ I_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

Las corrientes y voltajes de las resistencias derivadas se resumen en los siguientes vectores: $V_{R_{tr}}$, $I_{R_{tr}}$, $V_{R_{ctr}}$, $I_{R_{ctr}}$:

$$V_{R_{tr}} = \begin{bmatrix} V_{R_a} \\ V_{R_b} \\ V_{R_c} \\ V_{R_e} \end{bmatrix} \quad I_{R_{tr}} = \begin{bmatrix} I_{R_a} \\ I_{R_b} \\ I_{R_c} \\ I_{R_e} \end{bmatrix} \quad V_{R_{ctr}} = \begin{bmatrix} V_{R_d} \\ V_{R_f} \\ V_{R_g} \\ V_{R_h} \\ V_{R_j} \\ V_{R_i} \end{bmatrix} \quad I_{R_{ctr}} = \begin{bmatrix} I_{R_d} \\ I_{R_f} \\ I_{R_g} \\ I_{R_h} \\ I_{R_j} \\ I_{R_i} \end{bmatrix} \quad (4)$$

A partir de los vectores de las resistencias de rama de la ecuación (2) y (3) se pueden establecer fácilmente las matrices de resistencia de rama diagonales R_{tr} y R_{ctr} , así como las matrices de conductancia de rama diagonales correspondientes (G_{tr} y G_{ctr}).

$$R_{tr} = \text{diag}(r_{tr}) \quad R_{ctr} = \text{diag}(r_{ctr}) \quad G_{tr} = R_{tr}^{-1} \quad G_{ctr} = R_{ctr}^{-1} \quad (5)$$

De este modo, las corrientes, los voltajes y las resistencias de las ramas se estructuran topológicamente de tal manera que ambas matrices de incidencia fundamentales y los sistemas de ecuaciones necesarios pueden determinarse de manera muy eficiente a continuación.

3. Análisis nodal con matrices de incidencia

El punto de partida para relacionar el análisis de malla con el análisis nodal es el cálculo de corrientes y voltajes a partir de las matrices de incidencia. En este capítulo mostramos, sin pérdida de generalidad, cómo calcular los voltajes nodales V_N del circuito de la figura 1 empleando la matriz de incidencia de corriente fundamental y el análisis nodal.

El método se basa exclusivamente en la ley de Kirchhoff. Para obtener la suma con el signo correcto de todas las corrientes que entran y salen de un nodo, en el capítulo 2 se definieron como positivas las corrientes salientes (según la dirección de la flecha de recuento del consumidor) y como negativas las corrientes entrantes [3], [18].

Debido a la dependencia lineal de las ecuaciones de nodo, no todas ellas son utilizables para calcular corrientes y voltajes: se omite un nodo y se fija su potencial como referencia (0 V). Esto se debe a que, por conservación de la carga, cualquier ecuación de nodo puede obtenerse a partir de las demás. En el ejemplo, el nodo de referencia es el nodo V, aunque podría elegirse cualquiera,

siendo recomendable seleccionar el que tenga más ramas conectadas (generalmente tierra o masa). Los demás se denominan nodos independientes.

Los voltajes nodales calculados V_N corresponden a los voltajes del árbol V_{tr} . En el ejemplo, las corrientes de las ramas se orientan hacia el nodo de referencia, fluyendo desde los nodos independientes (I, II, III, IV) hasta el nodo V.

Para obtener sistemas de ecuaciones compactos que permitan calcular las corrientes y voltajes de las ramas (V_{br} e I_{br} , de branch en inglés), se emplea la denominada matriz de incidencia de corriente fundamental A_{br_f} , también llamada matriz de intersección fundamental [3], [4]. Las matrices de incidencia cuya submatriz cuadrática —que vincula las ramas del árbol con los nodos independientes— es una matriz identidad ($\mathbb{E}$) reciben el nombre de matrices de incidencia fundamentales A_{br_f} . Los vectores de corrientes y voltajes de rama, V_{br} e I_{br} , pueden componerse a partir de los vectores de corrientes y voltajes de rama del árbol, así como de los correspondientes a las ramas de conexión, de acuerdo con las ecuaciones (2) y (3): $V_{br}^T = [V_{tr}^T \ V_{ctr}^T]$, $I_{br}^T = [I_{tr}^T \ I_{ctr}^T]$. La matriz de incidencia —en este caso, la matriz de incidencia de corriente A_{br} — indica qué ramas están conectadas a qué nodos. Por ello también se denomina matriz de incidencia nodo-rama. Los valores a_{nm} de la matriz A_{br} se determinan a partir del circuito representado topológicamente en la figura 3, que se interpreta como un grafo dirigido al asignar direcciones a las corrientes de las ramas, según la siguiente regla [3], [4]:

- $a_{nm} = 0$ si la rama (m) no está conectada al nodo (n).
- $a_{nm} = 1$ si la corriente de la rama (m) sale del nodo (n).
- $a_{nm} = -1$ si la corriente de la rama (m) entra en el nodo (n).

De este modo, para el circuito del ejemplo preparado topológicamente según la figura 3, se obtiene la matriz de incidencia de corriente A_{br} . Esta incluye una matriz identidad y, por tanto, constituye una matriz de incidencia de corriente fundamental A_{br_f} . Las columnas m se ordenan según la secuencia de ramas [a, b, c, e, d, f, g, h, j, i], y las filas n según la secuencia de nodos [I, II, III, IV] o de ramas del árbol [a, b, c, e].

$$A_{br} = [A_{tr} \ A_{ctr}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_{br_f} \quad (6)$$

La matriz A_{br} puede descomponerse en dos submatrices: A_{tr} y A_{ctr} .

$$A_{br_f} = [\mathbb{E} \ S_f] \quad S_f = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

La submatriz A_{tr} corresponde a la matriz de incidencia de las ramas del árbol. Contiene la información sobre qué ramas del árbol están conectadas con cada nodo. En este caso, A_{tr} es una matriz identidad $\mathbb{E}$, lo que significa que cada rama del árbol se conecta únicamente con un nodo independiente. El otro extremo de cada rama está unido al nodo de referencia, que no aparece en la matriz de incidencia debido a que se ha omitido por la dependencia lineal.

La submatriz A_{ctr} se denomina matriz de incidencia de corriente de las ramas de conexión. Indica qué ramas de conexión están unidas a los nodos independientes. Finalmente, la matriz S_f representa la matriz fundamental de incidencia de corriente de las ramas de conexión.

En 1927, Weyl formuló en [6] el teorema de Kirchhoff a partir del producto del vector de corrientes de rama I_{br} con la matriz de incidencia de corriente A_{br} , cuyo resultado es cero (más precisamente, el vector nulo). Esta relación conduce al sistema de ecuaciones de todos los nodos independientes. El número de ecuaciones de nodos independientes coincide con el número de ramas del árbol.

Si se emplea la matriz de incidencia de corriente fundamental A_{brf} , puede determinarse con facilidad la dependencia de las corrientes de las ramas del árbol I_{tr} respecto de las corrientes de las ramas de conexión I_{ctr} , de acuerdo con la ecuación (8).

$$\mathbb{O} = A_{brf} \cdot I_{br} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} & S_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{tr} \\ I_{ctr} \end{bmatrix} = I_{tr} + S_f \cdot I_{ctr} \quad I_{tr} = -S_f \cdot I_{ctr} \quad (8)$$

Esta ecuación constituye el punto de partida para calcular los voltajes nodales mediante el álgebra topológica. Sustituyendo en el sistema (8) el vector de corrientes de las ramas del árbol, I_{tr} , por $(I_{R_{tr}} - I_{S_{tr}})$ y el vector de corrientes de las ramas de conexión, I_{ctr} , por $(I_{R_{ctr}} - I_{S_{ctr}})$ —según la ecuación (1) para la rama general— y trasladando al lado izquierdo los vectores de fuentes de corriente conocidas $I_{S_{tr}}$ e $I_{S_{ctr}}$, se obtiene la ecuación (9):

$$(I_{S_{tr}} + S_f \cdot I_{S_{ctr}}) = I_{R_{tr}} + S_f \cdot I_{R_{ctr}} \quad (9)$$

Si en la ecuación (9) sustituimos el vector de los corrientes a través de las resistencias de las ramas del árbol, $I_{R_{tr}}$, por el producto de la matriz de conductancia de esas ramas con su vector de voltajes $G_{tr} \cdot V_{R_{tr}}$, y el vector de los corrientes a través de las resistencias de las ramas de conexión, $I_{R_{ctr}}$, por el producto correspondiente $G_{ctr} \cdot V_{R_{ctr}}$ —de acuerdo con la ecuación (1)—, resulta la ecuación (10).

$$(I_{S_{tr}} + S_f \cdot I_{S_{ctr}}) = G_{tr} \cdot V_{R_{tr}} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot V_{R_{ctr}} \quad (10)$$

Sustituyamos en la ecuación (10) el vector de voltajes en las resistencias de las ramas del árbol, $V_{R_{tr}}$, por $(V_{tr} + V_{S_{tr}})$, y el vector de voltajes en las resistencias de las ramas de conexión, $V_{R_{ctr}}$, por $(V_{ctr} + V_{S_{ctr}})$ —según el teorema de la ecuación (1) para la rama general—. Al separar los términos que contienen los valores conocidos de las fuentes de corriente y de voltaje, junto con las matrices de conductancia de las ramas y su información topológica en forma de matrices $(G_{tr} \cdot V_{S_{tr}})$ y $(S_f \cdot G_{ctr} \cdot V_{S_{ctr}})$, en el lado izquierdo, se obtiene la ecuación (11):

$$(I_{S_{tr}} + S_f \cdot I_{S_{ctr}}) (G_{tr} \cdot V_{S_{tr}} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot V_{S_{ctr}}) = G_{tr} \cdot V_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot V_{ctr} \quad (11)$$

Introduciendo el vector de fuentes de corriente I_N , que refleja la relación entre las fuentes de voltaje y de corriente del circuito, y sustituyendo el vector de voltajes de las ramas de conexión, V_{ctr} , por el término $(S_f^T \cdot V_{tr})$ —que expresa su dependencia respecto del vector de voltajes de las ramas del árbol V_{tr} , según la ecuación (16) que se deriva en el siguiente capítulo—, se llega a la ecuación (12).

$$I_N = (G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T) \cdot V_{tr} \quad \text{mit} \quad I_N = (I_{S_{tr}} + S_f \cdot I_{S_{ctr}}) - (G_{tr} \cdot V_{S_{tr}} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot V_{S_{ctr}}) \quad (12)$$

La ecuación (12) incluye tanto fuentes de voltaje, $V_{S_{tr}}$ y $V_{S_{ctr}}$, como fuentes de corriente, $I_{S_{tr}}$ e $I_{S_{ctr}}$. Las fuentes de voltaje, según los teoremas de Helmholtz ⁶ [19], se transforman automáticamente en las fuentes de corriente equivalentes al multiplicarlas por las conductancias de las ramas correspondientes, de acuerdo con el teorema de Mayer ⁷ [18].

Mediante la introducción de la matriz de conductancia nodal G_N , obtenida a partir de las conductancias de las ramas y de la topología de la red, es posible calcular directamente los voltajes de las ramas del árbol, V_{tr} , —que en este caso coinciden con los voltajes nodales, V_N — invirtiendo dicha matriz:

$$V_{tr} = V_N = G_N^{-1} \cdot I_N \quad \text{con} \quad G_N = G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T \quad (13)$$

A partir de los voltajes de las ramas del árbol V_{tr} pueden calcularse los voltajes de las ramas de conexión V_{ctr} según la ecuación (16). A su vez, con los voltajes de las ramas se determinan las

⁶El teorema de Helmholtz [19], 1853, también se conoce en algunos países erróneamente como el teorema Thévenin [27], 1883

⁷El teorema de Mayer [18], 1927, también se conoce en los países de habla inglesa erróneamente como el teorema de Norton [21], 1927.

corrientes de rama, así como las corrientes a través de las resistencias y los voltajes correspondientes, utilizando el sistema de ecuaciones (1) para la rama general.

Aunque la matriz de conductancia nodal G_N se ha obtenido aquí con fines didácticos a partir de la matriz de incidencia de corriente fundamental, y para el caso particular de un circuito en forma del grafo no plano de Kuratowski K_5 , constituye el punto de partida para establecer la relación general entre el análisis nodal y el análisis de malla. En la sección Discusión se amplía y generaliza esta relación a representaciones de sistemas basadas también en matrices de incidencia no fundamentales.

4. Análisis de malla con matrices de incidencia

En este paso, para derivar la relación entre el análisis de malla y el análisis nodal, se presenta el cálculo de las corrientes y voltajes según el análisis de malla utilizando matrices de incidencia fundamentales. Este método se basa en la ley de Kirchhoff mencionada previamente y calcula las denominadas corrientes de malla (I_M), las cuales corresponden a las corrientes en las ramas de conexión (I_{ctr}). Las corrientes de las ramas de conexión son, por lo tanto, el punto de partida para determinar las ecuaciones de malla independientes, que se obtendrán con la ayuda del árbol completo de manera que se derive inmediatamente la matriz de incidencia de voltaje fundamental, B_f .

Una malla es un circuito cerrado que recorre cada rama solo una vez. En la ilustración 4 se muestra cómo cada rama de conexión (azul, verde, roja, rosa, marrón, amarilla) cierra una malla a través de las ramas conectadas del árbol. Concretamente, en la figura 4 se puede observar claramente que la rama de conexión d forma una trayectoria cerrada a través de las ramas del árbol a y e, la rama de conexión f a través de las ramas del árbol a y c, y así sucesivamente. Las mallas formadas de esta manera contienen exactamente una rama de conexión. Kirchhoff determinó el número de mallas independientes para la aplicación de la ley de las mallas [4] utilizando el número de ramas de conexión omitidas para reducir el grafo al árbol completo.

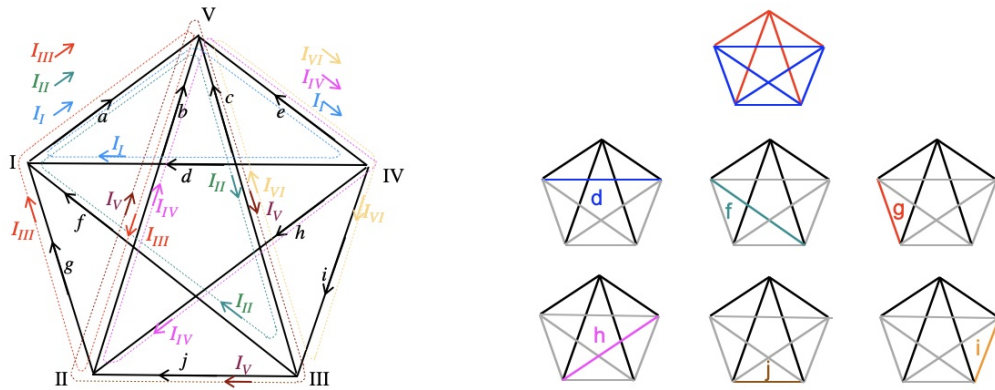


Figura 4: Ilustración de la formación de mallas basada en las ramas de conexión (d, f, g, h, j, i), que cierran una malla a través de las ramas del árbol (a, b, c, e).

La ilustración 4 muestra a la izquierda las mallas independientes formadas de esta manera. También es posible formar otras mallas, pero la matriz de incidencia derivada de ellas no es fundamental. La dirección de la corriente en la rama de conexión determina la dirección de la flecha de recuento de la malla. Así, en el siguiente paso, se obtiene inmediatamente una matriz de incidencia fundamental.

La suma con el signo correcto de todos los voltajes en la malla se forma en relación con la dirección de la malla. Si la dirección del voltaje y la dirección de la malla coinciden, el voltaje se incluye en la suma con signo positivo. Si son opuestas, se incluye con signo negativo. La suma con

el signo correcto de los voltajes en las mallas según Kirchhoff [1], [4] se realiza utilizando el álgebra tológica según Weyl [6], [3], [18] multiplicando la matriz de incidencia —en este caso, la matriz de incidencia de voltaje B_{br} — por el vector de voltaje de la rama, U_{br} . La matriz de incidencia indica qué ramas se encuentra en una malla y en qué dirección. Los valores b_{nm} de la matriz B_{br} se determinan para cada malla de la figura 4 de la siguiente manera. El número de fila (n) corresponde a la malla respectiva (n) y el número de columna (m) a la rama (m), cuya posición en la malla (n) se introduce en la matriz de incidencia de la siguiente manera.

- $b_{nm} = 0$ si la corriente de la rama (m) no fluye en la malla (n).
- $b_{nm} = 1$ si la corriente de la rama (m) fluye en la dirección de la malla (n).
- $b_{nm} = -1$ si la corriente de la rama (m) fluye contra dirección de la malla (n).

De este modo, se obtiene la siguiente matriz de incidencia de voltaje, B_{br} , para el gráfico de la figura 4 en la ecuación (14), en la que las columnas m están ordenadas según la siguiente secuencia de ramas [a,b,c,e,d,f,g,h,j,i] y las filas n según la siguiente secuencia de mallas [I,II,III,IV,V,VI] o de ramas de conexión [d,f,g,h,j,i]:

$$B_{br} = B_{br_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dado que las ramas de conexión solo se encuentran en una malla independiente y la dirección de la malla coincide con la dirección de la rama de conexión correspondiente, esta matriz de incidencia también contiene una matriz unidad. El ejemplo ilustra claramente que el número de ramas de conexión determina el número de mallas independientes. Esta matriz de incidencia también se denomina matriz de incidencia de voltaje fundamental, B_{br_f} . Para un tratamiento posterior eficiente, es conveniente separar la matriz B_{br} en dos submatrices B_{tr} , la matriz de incidencia de voltaje de rama de árbol, y B_{ctr} , la matriz de incidencia de voltaje de rama de conexión, (15) .

$$B_{br} = B_{br_f} = [B_{tr} \quad B_{ctr}] = [M_f \quad \mathbb{E}] \quad M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad M_f = -S_f^T \quad (15)$$

La matriz M_f es la matriz fundamental de incidencia de voltaje de ramas de árbol. Si se analiza la similitud con la matriz de incidencia de corriente de ramas de conexión fundamental, S_f , y sus simetrías, se observa que la matriz M_f se puede calcular a partir de la matriz transpuesta negativa $-S_f^T$ según la ecuación (15). Esta relación se explica con más detalle en la discusión.

De forma análoga a la ecuación (8), el producto del vector de voltaje de rama, V_{br} , con la matriz de incidencia de voltaje, B_{br} , es cero —correctamente igual al vector cero— y da lugar al sistema de ecuaciones de todas las ecuaciones de malla independientes. Con la matriz de incidencia de voltaje fundamental, B_{br_f} , se puede determinar fácilmente la dependencia de los voltajes de las ramas de conexión, V_{ctr} , de los voltajes de las ramas del árbol, V_{tr} , según la ecuación (16) [3], [4].

$$\mathbb{O} = B_{br_f} \cdot V_{br} = [M_f \quad \mathbb{E}] \cdot \begin{bmatrix} V_{tr} \\ V_{ctr} \end{bmatrix} = M_f \cdot V_{tr} + V_{ctr} \quad V_{ctr} = -M_f \cdot V_{tr} = S_f^T \cdot V_{tr} \quad (16)$$

Esta ecuación es el punto de partida para calcular las corrientes de malla con ayuda del álgebra topológica o matrices.

Sustituycamos en la ecuación (16) el vector de voltaje de la rama del árbol, V_{tr} , por $(V_{R_{tr}} - V_{S_{tr}})$ y el vector de voltaje de la rama de conexión, V_{ctr} , por $(V_{R_{ctr}} - V_{S_{ctr}})$ —de acuerdo con la ecuación (1) para la rama general— y separamos las variables conocidas $V_{S_{ctr}}$ y $V_{S_{tr}}$ en el lado izquierdo, obtenemos la ecuación (17) .

$$M_f \cdot V_{S_{tr}} + V_{S_{ctr}} = M_f \cdot V_{R_{tr}} + V_{R_{ctr}} \quad (17)$$

Si sustituimos en la ecuación (17) $V_{R_{tr}}$ por $(R_{tr} \cdot I_{R_{tr}})$ y $V_{R_{ctr}}$ por $(R_{ctr} \cdot I_{R_{ctr}})$ —de acuerdo con la ecuación (1) para la rama general— obtenemos la ecuación (18).

$$V_{S_{ctr}} + M_f \cdot V_{S_{tr}} = R_{ctr} \cdot I_{R_{ctr}} + M_f \cdot R_{tr} \cdot I_{R_{tr}} \quad (18)$$

Sustituycamos en la ecuación (18) $I_{R_{tr}}$ por $(I_{tr} + I_{S_{tr}})$ y $I_{R_{ctr}}$ por $(I_{ctr} + I_{S_{ctr}})$ —según la ecuación (1) para la rama general— y separamos los términos dados $M_f \cdot R_{tr} \cdot I_{S_{tr}}$ y $R_{ctr} \cdot I_{S_{ctr}}$ en el lado izquierdo, obtenemos la ecuación (19) .

$$V_{S_{ctr}} + M_f \cdot V_{S_{tr}} - (R_{ctr} \cdot I_{S_{ctr}} + M_f \cdot R_{tr} \cdot I_{S_{tr}}) = M_f \cdot R_{tr} \cdot I_{tr} + R_{ctr} \cdot I_{ctr} \quad (19)$$

Resumamos las magnitudes dadas en el lado izquierdo de la ecuación (19) para el vector de fuentes de tensión, V_M , que contiene las fuentes de voltaje y corriente resultantes del circuito, y sustituycamos I_{tr} por $(M_f^T \cdot I_{ctr})$ —de acuerdo con las ecuaciones (15) y (8)—, obtenemos la ecuación (20).

$$V_M = (M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T + R_{ctr}) \cdot I_{ctr} \quad \text{mit} \quad V_M = V_{S_{ctr}} + M_f \cdot V_{S_{tr}} - (R_{ctr} \cdot I_{S_{ctr}} + M_f \cdot R_{tr} \cdot I_{S_{tr}}) \quad (20)$$

La ecuación (20) contiene tanto fuentes de voltaje, $V_{S_{tr}}$ y $V_{S_{ctr}}$, como fuentes de corriente, $I_{S_{tr}}$ y $I_{S_{ctr}}$. Las fuentes de corriente se convierten «automáticamente» multiplicándolas por las resistencias de rama correspondientes según el teorema de Mayer ⁸ [18], en las fuentes de voltaje resultantes según Helmholtz ⁹ [19]. Con la introducción de la matriz de resistencia de malla, R_M , que se deriva de las resistencias de rama y su topología en la red, se pueden calcular las corrientes de rama de conexión, I_{ctr} , que en este caso son las corrientes de malla, I_M , mediante la inversión de R_M según la ecuación (21).

$$I_{ctr} = I_M = R_M^{-1} \cdot V_M \quad \text{mit} \quad R_M = M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T + R_{ctr} \quad (21)$$

A partir de las corrientes de las ramas de conexión, I_{ctr} , se pueden calcular las corrientes de las ramas del árbol, I_{tr} , con la ecuación (8). Todas las demás valores de las ramas se pueden calcular con el conjunto de ecuaciones (1) para la rama general. La matriz de resistencia de malla, R_M , tiene la misma estructura que la matriz de conductancia de nodo, G_N .

⁸El teorema de Mayer [18], 1927, también se conoce en los países de habla inglesa erróneamente como el teorema de Norton [21], 1927.

⁹El teorema de Helmholtz [19], 1853, también se conoce en algunos países erróneamente como el teorema de Thévenin. [27], 1883.

5. La relación entre las matrices de parámetros del análisis nodal y del análisis de malla.

La misma estructura de la matriz de resistencia, R_M , y la matriz de conductancia, G_N , es el punto de partida para derivar la relación entre el análisis nodal y el análisis de malla. Para ello, se puede utilizar el lema de la inversión de matrices según Frobenius y Schur ¹⁰ [23], [24]. La identidad de matrices de Frobenius y Schur en forma de Woodbury según la ecuación (22) es omnipresente en la tecnología. Basta con remitirse al filtro de Kalman [28], [29], que se utilizan, entre otras cosas, en la automatización, la comunicación y el procesamiento digital de señales, por ejemplo, en sistemas de protección digital de redes eléctricas [30]. Los autores de [31] utilizan el lema para acoplar simulaciones FEM con el cálculo de redes.

$$(X + UYV)^{-1} = X^{-1} - X^{-1}U(Y^{-1} + VX^{-1}U)^{-1}VX^{-1} \quad (22)$$

La estructura de la matriz de conductancia, G_N , permite aplicar la identidad matricial de Frobenius y Schur de la siguiente manera.

$$(G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T)^{-1} = G_{tr}^{-1} - G_{tr}^{-1} \cdot S_f \cdot (G_{ctr}^{-1} + S_f^T \cdot G_{tr}^{-1} \cdot S_f)^{-1} \cdot S_f^T \cdot G_{tr}^{-1} \quad (23)$$

Si se sustituyen las inversas de las dos matrices diagonales de las ramas, G_{tr}^{-1} y G_{ctr}^{-1} , por las matrices de resistencia de las ramas, R_{tr} y R_{ctr} , según la ecuación (5), y la matriz de incidencia de corriente de rama de conexión fundamental, S_f , por la matriz de incidencia de voltaje de rama de árbol transpuesta negativa, $-M_f^T$, según la ecuación (15), se observa que la inversa de la matriz de conductancia, G_N^{-1} , se puede calcular con ayuda de la inversa de la matriz de resistencia, R_M^{-1} , así como de la matriz de incidencia de voltaje de rama de árbol fundamental, M_f , según la ecuación (24).

$$(G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T)^{-1} = R_{tr} - R_{tr} \cdot M_f^T \cdot (R_{ctr} + M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T)^{-1} \cdot M_f \cdot R_{tr} \quad (24)$$

Si se aplica la identidad matricial de Frobenius y Schur a la inversa de la matriz de resistencia R_M , se obtiene la ecuación (25).

$$(R_{ctr} + M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T)^{-1} = R_{ctr}^{-1} - R_{ctr}^{-1} \cdot M_f \cdot (R_{tr}^{-1} + M_f^T \cdot R_{ctr}^{-1} \cdot M_f)^{-1} \cdot M_f^T \cdot R_{ctr}^{-1} \quad (25)$$

Si sustituimos las inversas de las dos matrices de resistencia de rama, R_{tr}^{-1} y R_{ctr}^{-1} , por las matrices de conductancia de rama, G_{tr} y G_{ctr} , y la matriz de incidencia de voltaje de rama fundamental del árbol M_f por la matriz de incidencia de corriente de rama de conexión transpuesta negativa, $-S_f^T$, se observa que la inversa de la matriz de resistencia de malla, R_M^{-1} , se puede calcular con ayuda de la inversa de la matriz de conductancia, G_N^{-1} , así como de la matriz de incidencia de corriente de las ramas de conexión fundamentales, S_f , según la ecuación (26).

$$(R_{ctr} + M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T)^{-1} = G_{ctr} - G_{ctr} \cdot S_f^T \cdot (G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T)^{-1} \cdot S_f \cdot G_{ctr} \quad (26)$$

Con la ecuación (24) se puede calcular la inversa de la matriz de conductancia, G_N , a partir de la inversa de la matriz de resistencia, R_M . Y con la ecuación (26) se puede calcular la inversa de la matriz de resistencia, R_M , a partir de la inversa de la matriz de conductancia, G_N .

Así, el teorema define un operador para sistemas duales como sistemas de flujo y energía que permite transformar sus representaciones unos en otros.

¹⁰La identidad matricial de Frobenius, [23], 1912, y Schur, [24], 1918, también se conoce en los países de habla inglesa erróneamente como la identidad matricial de Woodbury. [25] 1949.

6. Ejemplo numérico

En este capítulo se presentan los resultados de los cálculos de las corrientes y voltajes de rama para el circuito eléctrico preparado topológicamente de la figura 1. Para mayor claridad, todas las direcciones de los voltajes y de las corrientes para el análisis nodal y de malla se muestran en la figura 5.

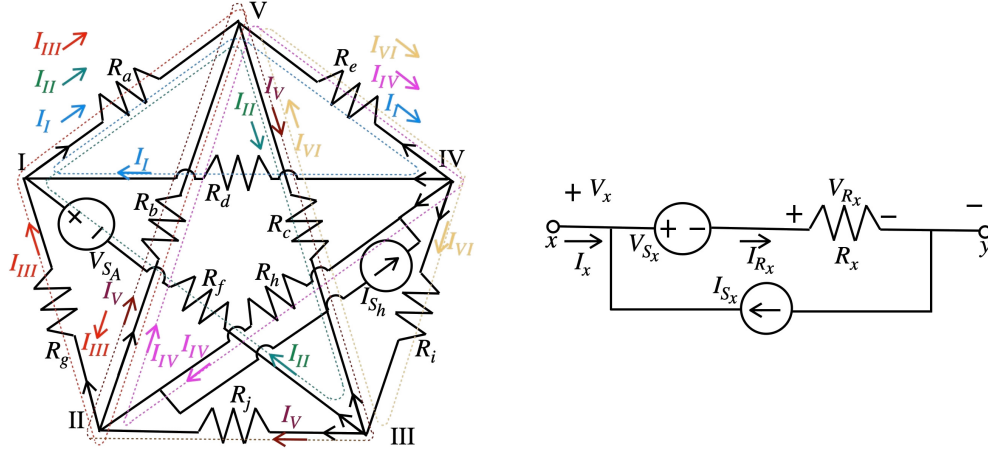


Figura 5: Circuito preparado topológicamente según la ilustración 1 con direcciones de voltajes y corrientes para el análisis de malla y análisis nodal, así como interconexión de la rama general.

Los vectores de las resistencias de rama, r_{tr} y r_{ctr} , se obtienen a partir de las ecuaciones (2) y (3), en las que se introducen los valores de la figura 1.

Los vectores para las fuentes de corriente y voltaje, $V_{S_{tr}}$ y $V_{S_{ctr}}$, así como $I_{S_{tr}}$ e $I_{S_{ctr}}$, dan lugar a las siguientes asignaciones según las direcciones de los voltajes y las corrientes de la figura 5 y las ecuaciones (47).

$$V_{S_{tr}} = \begin{bmatrix} 0V \\ 0V \\ 0V \\ 0V \end{bmatrix} \quad I_{S_{tr}} = \begin{bmatrix} 0A \\ 0A \\ 0A \\ 0A \end{bmatrix} \quad V_{S_{ctr}} = \begin{bmatrix} 0V \\ 5V \\ 0V \\ 0V \\ 0V \\ 0V \end{bmatrix} \quad I_{S_{ctr}} = \begin{bmatrix} 0A \\ 0A \\ 0A \\ \frac{7}{8}A \\ 0A \\ 0A \end{bmatrix} \quad (27)$$

Con estos datos, se obtienen para ambos métodos, es decir, para el análisis nodal según las ecuaciones (13) y (16) y análisis de malla según las ecuaciones (21) y (15), así como utilizando las ecuaciones (24) y (26), se obtienen los siguientes corrientes de rama, I_{ctr} y I_{ctr} , y voltajes de rama, V_{ctr} y V_{ctr} . Los cálculos se realizaron con Octave con su precisión estándar de 16 decimales.

$$V_{tr} = \begin{bmatrix} 0,5039 \\ -0,8836 \\ -1,0331 \\ 1,1289 \end{bmatrix} V \quad V_{ctr} = \begin{bmatrix} 0,6250 \\ -1,5370 \\ -1,3876 \\ 2,0126 \\ -0,1494 \\ 2,1620 \end{bmatrix} V \quad I_{tr} = \begin{bmatrix} 0,5039 \\ -0,4418 \\ -0,3444 \\ 0,2822 \end{bmatrix} A \quad I_{ctr} = \begin{bmatrix} 0,124998 \\ 0,577164 \\ -0,198223 \\ -0,623431 \\ -0,016606 \\ 0,216200 \end{bmatrix} A \quad (28)$$

La consistencia de esta solución se confirma según el teorema de balance de potencia de Weyl ¹¹

¹¹El teorema de Weyl [6], 1927, también se conoce erróneamente como el teorema Tellegen [26], 1952.

según la ecuación (39) y da valores numéricos alrededor de cero en el rango de precisión de cálculo de $2, 210^{-16}$ y $-1, 710^{-15}$.

La matriz de resistencia, R_M , para la matriz de incidencia según la ecuación (14) y la ecuación (21), y la matriz de conductancia, G_N , para la matriz de incidencia según la ecuación (6) y la ecuación (13) tienen los siguientes valores.

$$R_M = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 10 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 14 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 14 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 4 & -3 & 17 \end{bmatrix} \Omega \quad G_N = \begin{bmatrix} 1,5095 & -0,1429 & -0,1667 & -0,2000 \\ -0,1429 & 0,8790 & -0,1111 & -0,1250 \\ -0,1667 & -0,1111 & 0,7111 & -0,1000 \\ -0,2000 & -0,1250 & -0,1000 & 0,6750 \end{bmatrix} S \quad (29)$$

La inversa de la matriz de resistencia, R_M^{-1} , según las ecuaciones (21) y (26) tiene los siguientes valores.

$$R_M^{-1} = \begin{bmatrix} 0,12631 & -0,018794 & -0,016887 & -0,031281 & 0,0006046 & -0,025569 \\ -0,018794 & 0,11631 & -0,014141 & 0,00062672 & -0,022573 & 0,020817 \\ -0,016887 & -0,0014141 & 0,10998 & 0,018217 & 0,016147 & 0,000041079 \\ -0,031281 & 0,00062672 & 0,018217 & 0,089509 & -0,013751 & -0,016017 \\ 0,0006046 & -0,022573 & 0,016147 & -0,013751 & 0,083504 & 0,013846 \\ -0,025569 & 0,020817 & 0,000041079 & -0,016017 & 0,013846 & 0,074725 \end{bmatrix} S \quad (30)$$

La inversa de la matriz de conductancia, G_N^{-1} , según las ecuaciones (13) y (24) tiene los siguientes valores.

$$G_N^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7470 & 0,1944 & 0,2468 & 0,2939 \\ 0,1944 & 1,2530 & 0,2881 & 0,3323 \\ 0,2468 & 0,2881 & 1,5594 & 0,3575 \\ 0,2939 & 0,3323 & 0,3575 & 1,6831 \end{bmatrix} \Omega \quad (31)$$

Se obtuvieron los mismos valores con todos los métodos, es decir, según las ecuaciones (13) y (21), así como (24) y (26), con una precisión numérica de 6 dígitos. Las desviaciones numéricas entre el cálculo directo de las inversas según las ecuaciones (13) y (21) y el cálculo indirecto de las inversas a partir de las otras inversas según las ecuaciones (24) y (26) se encuentran en este ejemplo entre $\pm 10^{-15} \dots \pm 10^{-18}$.

7. Discusión

En esta sección se profundiza en las siguientes relaciones y se amplían los ámbitos de validez de los sistemas de ecuaciones mostrados.

A Extensión de la validez a matrices de incidencia no fundamentales

B Ortogonalidad de la matriz de incidencia de tensión y corriente

C Prueba algebraica para circuitos conectados

D Aplicación del análisis de malla

E Aplicación al análisis de procesos estacionarios y dinámicos en circuitos de corriente alterna

F Extensión en teoría de grafos

A Extensión de la validez a matrices de incidencia no fundamentales

La relación entre la inversa de la matriz de resistencia, R_M^{-1} , y la inversa de la matriz de conductancia, G_N^{-1} , se basa en la matriz de incidencia de voltaje de rama fundamental, M_f , y la matriz de incidencia de corriente de rama de conexión fundamental, S_f . Para ampliar la validez de la relación también a matrices de incidencia no fundamentales, utilizamos la ortogonalidad de la matriz de incidencia de corriente, A_{br} , y la matriz de incidencia de voltaje, B_{br} , según Weyl [3], [6], [4]. En el sistema de ecuaciones (32), (33), (34), (35) se muestra cómo se pueden calcular a partir de las matrices de incidencia no fundamentales, A_{br_o} y B_{br_o} , la matriz de incidencia de corriente de rama de conexión fundamental, S_f , y la matriz de incidencia de tensión de rama de árbol, M_f [4].

$$\mathbb{O} = A_{br_o} \cdot B_{br_f}^T = [A_{tr_o} \quad A_{ctr_o}] \cdot \begin{bmatrix} M_f^T \\ \mathbb{E} \end{bmatrix} = A_{tr_o} \cdot M_f^T + A_{ctr_o} \quad (32)$$

$$M_f^T = -A_{tr_o}^{-1} \cdot A_{ctr_o} \quad (33)$$

$$\mathbb{O} = A_{br_f} \cdot B_{br_o}^T = [\mathbb{E} \quad S_f] \cdot \begin{bmatrix} B_{tr_o}^T \\ B_{ctr_o}^T \end{bmatrix} = B_{tr_o}^T + S_f \cdot B_{ctr_o}^T \quad (34)$$

$$S_f = -B_{tr_o}^T \cdot B_{ctr_o}^{T-1} \quad (35)$$

Si se dan o se determinan las matrices de incidencia no fundamentales de un circuito eléctrico, B_{br_o} A_{br_o} , se pueden determinar a partir de ellas las submatrices fundamentales, M_f y S_f , según las ecuaciones (33) y (35) [4].

Para mayor claridad, a continuación demostramos con las ecuaciones (36) y (37) la ortogonalidad de las matrices de incidencia fundamentales, $A_{br_f} \cdot B_{br_f}$, generadas a partir de las matrices de incidencia no fundamentales originales, A_{br_o} y B_{br_o} , demostramos la ortogonalidad de las matrices de incidencia fundamentales, $A_{br_f} \cdot B_{br_f}$, generadas a partir de las matrices de incidencia originales no fundamentales. Para ello se utiliza la relación ($M_f^T = -S_f$) de la ecuación (15).

$$\mathbb{O} = A_{br_f} \cdot B_{br_f}^T = [\mathbb{E} \quad A_{tr_o}^{-1} A_{ctr_o}] \cdot \begin{bmatrix} (B_{ctr_o}^{-1} \cdot B_{tr_o})^T \\ \mathbb{E} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbb{O} = (B_{ctr_o}^{-1} \cdot B_{tr_o})^T + A_{tr_o}^{-1} A_{ctr_o} = -A_{tr_o}^{-1} A_{ctr_o} + A_{tr_o}^{-1} A_{ctr_o} \quad (37)$$

Las relaciones entre la matriz de incidencia de corriente de ramas de conexión fundamentales, S_f , y la matriz de incidencia de voltaje de ramas de árbol, M_f , también se pueden demostrar mediante el teorema de Weyl ¹² [6]. El punto de partida son las relaciones entre las corrientes y los voltajes de las ramas, así como las dependencias de las ramas del árbol y de conexión según las ecuaciones (8) y (16), que se resumen en el sistema de ecuaciones (38).

$$I_{br} = \begin{bmatrix} I_{tr} \\ I_{ctr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S \\ 1 \end{bmatrix} \cdot I_{ctr} \quad V_{br} = \begin{bmatrix} V_{tr} \\ V_{ctr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -M \end{bmatrix} \cdot V_{tr} \quad (38)$$

Si ahora calculamos la balanza por potencia según el teorema de Weyl ¹³ [6] para el circuito, obtenemos la ecuación (39).

$$0 = V_{br}^T \cdot I_{br} = [V_{tr}^T \quad V_{ctr}^T] \cdot \begin{bmatrix} I_{tr} \\ I_{ctr} \end{bmatrix} = V_{tr}^T \cdot I_{tr} + V_{ctr}^T \cdot I_{ctr} \quad (39)$$

Lo interesante de la ecuación (39) es que la suma de las potencias de todas las ramas del árbol es igual a la suma negativa de las potencias de todas las ramas de conexión ($V_{tr}^T \cdot I_{tr} = -V_{ctr}^T \cdot I_{ctr}$). Si

¹²El teorema de Weyl [6], 1927, también se conoce erróneamente como el teorema Tellegen [26], 1952.

¹³El teorema de Weyl [6], 1927, también se conoce erróneamente como el teorema Tellegen [26], 1952.

se sustituyen las relaciones del sistema de ecuaciones (38) en la ecuación (39), se obtiene la ecuación (40)

$$0 = V_{tr}^T \cdot (-S_f \cdot I_{ctr}) + (-M_f \cdot V_{tr})^T \cdot I_{ctr} \quad (40)$$

Si se reorganiza el sistema de ecuaciones (40), se puede extraer la relación entre la matriz de incidencia de corriente de rama fundamental, S_f , y la matriz de incidencia de tensión de rama de conexión fundamental M_f .

$$V_{tr}^T \cdot S_f \cdot I_{ctr} = V_{tr}^T \cdot (-M_f^T) \cdot I_{ctr} \rightarrow S_f = -M_f^T \quad (41)$$

Las matrices de incidencia fundamentales $[\mathbb{E} \ S_f]$ y $[M_f \ \mathbb{E}]$ también se pueden calcular mediante las inversas de las submatrices cuadradas de las matrices de incidencia no fundamentales. Es decir, multiplicando la matriz $A_{br_o} = [A_{tr_o} \ A_{ctr_o}]$ con $A_{tr_o}^{-1}$. Y multiplicando la matriz. $B_{br_o} = [B_{tr_o} \ B_{ctr_o}]$ con $B_{ctr_o}^{-1}$. De este modo, se obtiene inmediatamente: $A_{br_f} = [\mathbb{E} \ S_f] = [\mathbb{E} \ A_{tr_o}^{-1} \cdot A_{ctr_o}]$ y $B_{br_f} = [M_f \ \mathbb{E}] = [B_{ctr_o}^{-1} \cdot B_{tr_o} \ \mathbb{E}]$. Estas relaciones, derivadas de forma algo más sencilla, se seguirán utilizando en lo sucesivo.

B Ortogonalidad de la matriz de incidencia de voltaje y de corriente

La relación entre la matriz de incidencia de corriente de rama de conexión fundamental, S_f , y la matriz de incidencia de voltaje de rama de árbol fundamental, M_f , se ha basado en las leyes de Kirchhoff [1], que se expresan en las ecuaciones (8) y (15), así como del teorema de Weyl¹⁴ [6] según la ecuación (39). Con la ecuación (41) se puede ahora, en aras de la exhaustividad, mostrar la ortogonalidad utilizada en las ecuaciones anteriores (32) y (34) entre la matriz de incidencia de corriente fundamental, A_{br_f} , y la matriz de incidencia de tensión fundamental, B_{br_f} .

$$\mathbb{O} = A_{br_f}^T \cdot B_{br_f} = [\mathbb{E} \ S_f^T] \cdot \begin{bmatrix} M_f \\ \mathbb{E} \end{bmatrix} = M_f + S_f^T = -S_f^T + S_f^T \quad (42)$$

C Prueba algebraica para circuitos conectados

En este punto, cabe mencionar que, con ayuda de la matriz de incidencia de corriente completa", A_{br_C} según la ecuación (43), que también contiene la información sobre qué ramas están conectadas al nodo de referencia, se puede comprobar fácilmente si un gráfico es coherente o no. La matriz que se introduce en la literatura especializada en electrotecnia como matriz de incidencia es, en realidad, la matriz de incidencia reducida, que no contiene la información topológica del nodo de referencia.

$$A_{br_C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Si el producto del vector unitario, $\mathbb{I} = [1 \ 1 \dots 1]$, con la matriz de incidencia de corriente completa", A_{br_C} , según la ecuación (43) da como resultado un vector nulo, $\mathbb{O} = [0 \ 0 \dots 0]$, entonces el grafo es conexo.

$$\mathbb{O} = \mathbb{I} \cdot A_{br_C} \quad (44)$$

En el presente ejemplo, este es el caso, ya que cada columna contiene, además de ceros, exactamente un 1 y un -1. Esto es fácil de comprobar, ya que cada rama está conectada con

¹⁴El teorema de Weyl [6], 1927, también se conoce erróneamente como el teorema de Tellegen [26], 1952.

exactamente dos nodos diferentes, y la dirección de corriente de cada rama apunta exactamente hacia un nodo y sale del otro. Con la matriz de incidencia completa", cada fila se puede calcular con la ayuda de las demás. Simplemente corresponde a la suma negativa de las columnas de la matriz A_{br_C} para cada elemento de la fila que se va a determinar, omitiendo la fila que se va a determinar. Esta consideración ilustra la dependencia lineal de las filas en la matriz de incidencia de flujo «completa», A_{br_C} entre sí. Para establecer un sistema de ecuaciones lineales solucionable con ayuda de las matrices topológicas, en este caso las matrices de incidencia de corriente, es imprescindible omitir una fila de la matriz de incidencia de corriente completa", A_{br_C} y continuar el cálculo con la matriz de incidencia reducida", A_{br} en torno al nodo de referencia. Si el nodo de referencia está conectado con todos los demás nodos del circuito, al establecer la matriz de incidencia de corriente reducida", A_{br} , (en torno al nodo de referencia) se obtiene inmediatamente una matriz de incidencia de corriente fundamental.

D Aplicación del análisis de malla

Las ecuaciones (23) y (25) permiten, por un lado, calcular los voltajes en los nodos, V_N , utilizando la matriz de resistencia R_M derivada del análisis de malla y, por otro lado, calcular las corrientes de malla, I_M , utilizando la matriz de conductividad G_N derivada del análisis nodal, incluso para matrices de incidencia no fundamentales, que pueden convertirse en fundamentales según las ecuaciones (33) y (35). Las dos ecuaciones (45) y (46) expresan esto matemáticamente.

$$I_M = R_M^{-1} \cdot V_M = (G_{ctr} - G_{ctr} \cdot S_f^T \cdot G_N^{-1} \cdot S_f \cdot G_{ctr}) \cdot V_M \quad (45)$$

$$V_N = G_N^{-1} \cdot I_N = (R_{tr} - R_{tr} \cdot M_f^T \cdot R_M^{-1} \cdot M_f \cdot R_{tr}) \cdot I_N \quad (46)$$

Las dos ecuaciones (45) y (46) refutan, por un lado, la inaplicabilidad fundamental del análisis de malla a circuitos no planos, tal y como se describe en [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], y, por otro lado, la afirmación de [9] de que el análisis nodal es más general que el análisis de corriente de malla. Por el contrario, si se utiliza el análisis de malla junto con el método del árbol completo, tal y como se describe en el artículo, también es muy fácil establecer la matriz de incidencia de voltaje fundamental para circuitos no planos y, con ayuda de las dependencias representadas, también la matriz de incidencia de corriente fundamental.

En los capítulos 3 y 4 se ha demostrado que el número de ramas del árbol determina el número de nodos independientes, y el número de ramas de conexión determina el número de mallas independientes. Si un circuito tiene menos ramas de árbol que ramas de conexión, se recomienda utilizar el análisis de tensión de nodos. Si el circuito tiene menos ramas de conexión que ramas de árbol, se recomienda el análisis de corriente de malla. Cabe señalar que en los sistemas magnéticos se prefiere utilizar el análisis de corriente de malla.

E Análisis de procesos estacionarios y dinámicos en circuitos de corriente alterna.

Si la resistencia de la rama se sustituye por una impedancia, por ejemplo, $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega \cdot C}$, $\underline{Z}_L = j\omega \cdot L$, $\underline{Z}_R = R$ o la conductancia de la rama por una admitancia, por ejemplo, $\underline{Y}_C = j\omega \cdot C$, $\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega \cdot L}$, $\underline{Y}_G = G$, la validez de la relación según las ecuaciones (24) y (26) también se puede ampliar al cálculo de procesos estacionarios en redes de corriente alterna en el plano complejo.

Si las relaciones entre la corriente y el voltaje en el elemento correspondiente, resistencia, conductancia, inductancia o capacitancia, se transforman en el dominio de Laplace mediante la transformada de Laplace, se puede describir el comportamiento de los elementos correspondientes mediante las siguientes impedancias, por ejemplo, $Z_C(s) = \frac{1}{s \cdot C}$, $Z_L(s) = s \cdot L$, $Z_R(s) = R$ o mediante las siguientes admitancias, por ejemplo, $Y_C(s) = s \cdot C$, $Y_L(s) = \frac{1}{s \cdot L}$, $Y_G(s) = G$. De este modo, la validez de la relación también se puede ampliar a procesos dinámicos en redes de corriente alterna.

Los métodos para establecer las matrices de impedancia y admitancia para ambos procedimientos, es decir, los procedimientos en el plano complejo o en el dominio de la frecuencia y

en el dominio de Laplace, se describen detalladamente, entre otros, en [3].

Una vez ampliada, generalizada y demostrada la validez de las ecuaciones (24) y (26), en el siguiente capítulo se resumen los conocimientos adquiridos.

F Extensión en teoría de grafos

En la teoría de grafos, la matriz de incidencia de corrientes, A_{br} , se denomina matriz de incidencia de nodos, y la matriz de incidencia de voltajes, B_{br} , se denomina matriz de incidencia de rama. A partir de ambas matrices de incidencia reducidas pueden obtenerse las llamadas matrices de Laplace reducidas, L_A y L_B ¹⁵.

Sin pérdida de generalidad —véase la Sección A de la discusión—, las matrices de Laplace reducidas, L_A y L_B , pueden calcularse a partir de las matrices de incidencia fundamentales (reducidas), A_{br_f} y B_{br_f} , según las ecuaciones (47) y (48).

$$L_A = A_{br_f} \cdot A_{br_f}^T = [\mathbb{E} \quad S_f] \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{E} \\ S_f^T \end{bmatrix} = \mathbb{E} + S_f \cdot S_f^T = \mathbb{E} + M_f^T \cdot M_f \quad (47)$$

$$L_B = B_{br_f} \cdot B_{br_f}^T = \begin{bmatrix} M_f & \mathbb{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_f^T \\ \mathbb{E} \end{bmatrix} = \mathbb{E} + M_f \cdot M_f^T = \mathbb{E} + S_f^T \cdot S_f \quad (48)$$

Las matrices de Laplace reducidas de las matrices de incidencia de nodos y de ramas pueden obtenerse mediante las simetrías de las submatrices S_f y M_f de dichas matrices de incidencia.

Con la ayuda de la identidad matricial de Frobenius y Schur pueden establecerse también relaciones directas entre las inversas de ambas matrices de Laplace reducidas.

$$L_A^{-1} = (\mathbb{E} + S_f \cdot S_f^T)^{-1} = \mathbb{E} + S_f \cdot (\mathbb{E} + M_f \cdot M_f^T)^{-1} \cdot S_f^T \quad (49)$$

$$L_B^{-1} = (\mathbb{E} + M_f \cdot M_f^T)^{-1} = \mathbb{E} + M_f \cdot (\mathbb{E} + S_f \cdot S_f^T)^{-1} \cdot M_f^T \quad (50)$$

Este artículo se limita a mostrar las relaciones entre las matrices de incidencia de nodos y de ramas independientes —o reducidas—, así como entre sus matrices de Laplace e inversas según las ecuaciones (47), (48), (49) y (50).

Así, el teorema define también un operador para las representaciones duales de sistemas de graphos que permite transformar estas representaciones unos en otros.

8. Conclusiones

Los resultados pueden resumirse formalmente en un teorema de redes.

Teorema de redes: Sea un circuito eléctrico que cumple las siguientes condiciones:

- El grafo dirigido del circuito es conexo y contiene al menos un árbol completo.
- Cada rama conecta siempre dos nodos distintos.
- Cada nodo está conectado con al menos dos ramas.

¹⁵Las matrices de Laplace reducidas no son matrices de Laplace en el sentido estricto, ya que se obtienen a partir de matrices de incidencia reducidas. Estas matrices de incidencia reducidas se derivan de las matrices de incidencia completas, por ejemplo eliminando una fila. Como resultado, las sumas de filas y columnas ya no son cero. Al multiplicar la matriz de incidencia reducida por su transpuesta se obtiene una matriz invertible, que también se conoce como menor principal de la matriz de Laplace. La matriz de Laplace, en cambio, no es invertible.

- Cada rama corresponde al circuito mostrado en la figura 2, la rama general. La rama contiene una resistencia finita, que puede estar conectada en serie con una fuente de tensión. A la resistencia, o a la asociación en serie de resistencia y fuente de tensión, puede conectarse en paralelo una fuente de corriente.

De un circuito de este tipo, cuyos sistemas de ecuaciones —obtenidos mediante el análisis de malla o el el análisis nodal— contienen matrices de parámetros invertibles, es decir, la matriz de conductancias G_N y la matriz de resistencias R_M , pueden convertirse las inversas G_N^{-1} y R_M^{-1} entre si.

Esto se logra utilizando las siguientes matrices:

- la matriz de incidencia de corrientes A_{br_o} , con sus submatrices matriz de incidencia de corrientes de ramas del árbol A_{tr} y matriz de incidencia de corrientes de ramas de conexión A_{ctr}
- la matriz de incidencia de voltajes B_{br_o} , con sus submatrices matriz de incidencia de voltaje de ramas del árbol B_{tr} y matriz de incidencia de voltajes de ramas de conexión B_{ctr} ,
- la matriz de resistencias de las ramas del arbol R_{tr} y de las ramas de connexion R_{ctr}
- la matriz de conductancias de las ramas del arbol G_{tr} y de las ramas de connexion G_{ctr}

así como de la siguiente manera.

$$R_M^{-1} = G_{ctr} - G_{ctr} \cdot S_f^T \cdot G_N^{-1} \cdot S_f \cdot G_{ctr} \quad \text{mit} \quad G_N = G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T \quad (51)$$

$$S_f = A_{tr_o}^{-1} \cdot A_{ctr_o} \quad (52)$$

$$G_N^{-1} = R_{tr} - R_{tr} \cdot M_f^T \cdot R_M^{-1} \cdot M_f \cdot R_{tr} \quad \text{mit} \quad R_M = R_{ctr} + M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T \quad (53)$$

$$M_f = B_{ctr_o}^{-1} \cdot B_{tr_o} \quad (54)$$

Prueba: La Prueba se basa en las relaciones previamente derivadas en detalle con matrices de incidencia fundamentales y no fundamentales, y las resume en una forma unificada.

Mediante las siguientes sustituciones en la ecuación (51) se obtiene la ecuación (25):

- la matriz de resistencia R_M por el término $(R_{ctr} + M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T)$
- la matriz de conductancia de rama G_{tr} y G_{tr} , por las inversas de las matrices de resistencia de rama R_{tr}^{-1} y R_{ctr}^{-1}
- la matriz de incidencia de corrientes, S_f , por la matriz de incidencia de voltajes de ramas del árbol, transpuesta y con signo negativo, $-M_f^T$.

Las ecuaciones (23) y (25) corresponden a la identidad matricial de Frobenius y Schur según la ecuación (22), con lo cual queda demostrada la igualdad de los términos en ambos lados de las ecuaciones (51) y (53).

La generación de las matrices de incidencia fundamentales, A_{br_f} y B_{br_f} , a partir de las matrices de incidencia de corriente y de voltaje no fundamentales, A_{br_o} y B_{br_o} , según las ecuaciones (33) y (35), se basa en la ortogonalidad entre la matriz de incidencia de corriente y la de voltaje, que se deduce del teorema de Weyl [3]. En la ecuación (42) se demuestra la ortogonalidad entre las matrices de incidencia fundamentales generadas, A_{br_f} y B_{br_f} .

q.e.d.

Con las ecuaciones derivadas, es posible calcular las corrientes de malla I_M a partir de vectores y matrices obtenidos exclusivamente mediante el análisis nodal.

$$I_{ctr} = I_M = R_{M^*}^{-1} \cdot V_{M^*} \quad \text{mit} \quad V_{M^*} = (V_{S_{ctr}} - S_f^T \cdot V_{S_{tr}}) - (G_{ctr}^{-1} \cdot I_{S_{ctr}} - S_f^T \cdot G_{tr}^{-1} \cdot I_{S_{tr}}) \quad (55)$$

$$R_{M^*}^{-1} = G_{ctr} - G_{ctr} \cdot S_f^T \cdot G_N^{-1} \cdot S_f \cdot G_{ctr} \quad (56)$$

$$G_N = G_{tr} + S_f \cdot G_{ctr} \cdot S_f^T \quad (57)$$

$$S_f = A_{tr_o}^{-1} \cdot A_{ctr_o} \quad (58)$$

Del mismo modo, es posible calcular los voltajes nodales V_N a partir de vectores y matrices obtenidos exclusivamente mediante el análisis de malla.

$$V_{tr} = V_N = G_{N^*}^{-1} \cdot I_{N^*} \quad \text{mit} \quad I_{N^*} = (I_{S_{tr}} - M_f^T \cdot I_{S_{ctr}}) - (R_{tr}^{-1} \cdot V_{S_{tr}} - M_f^T \cdot R_{ctr}^{-1} \cdot V_{S_{ctr}}) \quad (59)$$

$$G_{N^*}^{-1} = R_{tr} - R_{tr} \cdot M_f^T \cdot R_M^{-1} \cdot M_f \cdot R_{tr} \quad (60)$$

$$R_M = R_{ctr} + M_f \cdot R_{tr} \cdot M_f^T \quad (61)$$

$$M_f = B_{ctr_o}^{-1} \cdot B_{tr_o} \quad (62)$$

Las relaciones (55) y (59) respaldan la equivalencia en la aplicabilidad del análisis nodal y del análisis de malla, cuya validez había sido cuestionada por los autores [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Las relaciones aquí derivadas, aunque algo más complejas, amplían el repertorio de métodos de cálculo para redes eléctricas y abren nuevas posibilidades, por ejemplo, en aplicaciones en tiempo real donde solo se dispone de valores medidos o estados a través de sensores, los cuales requieren a su vez procedimientos específicos.

El teorema refuta además la opinión, muy difundida en la literatura internacional sobre la teoría del cálculo de circuitos eléctricos, de que el análisis de malla no es aplicable a circuitos no planos (tridimensionales).

Autores estadounidenses de libros de texto y libros especializados, publicados por editoriales reconocidas como Springer, Pearson, McGraw Hill e IEEE, comenzaron a trasladar la regla de los signos del análisis nodal al análisis de malla. De esta manera, establecieron simplemente los valores de resistencia de los elementos no diagonales en la matriz de resistencias como negativos, sin considerar la dirección real de las corrientes de rama. Esta simplificación es matemáticamente incorrecta y se adoptó históricamente sin haber sido verificada, reproducida en numerosas ocasiones, traducida y presentada como de aplicación universal. La célebre afirmación de Einstein: «Haz todo tan simple como sea posible, pero no más» resulta acertada, sobre todo porque estos autores deben integrar un paso adicional en el análisis de malla para evitar errores.

El ejemplo numérico de cálculo de un circuito en forma de un grafo no plano de Kuratowski K_5 apoya la demostración general con valores concretos.

Dado que el análisis nodal se basa en la conservación de la carga y el análisis de malla en la conservación de la energía, el teorema convierte sistemas de ecuaciones de conservación de carga en sistemas de conservación de energía y viceversa [32]. Además, el teorema puede extenderse a sistemas de conservación de la energía y de la masa y, en general, a sistemas de flujos y de energías acopladas.

Además, el teorema define un operador para sistemas duales como de sistemas flujos y de energías que permite transformar unos en otros.

Estas relaciones permiten a diseñadores, constructores y analistas de sistemas energéticos, así como de sistemas multisensoriales —como protecciones para redes energéticas inteligentes o biosensores inteligentes basados en circuitos con estructuras tridimensionales— seleccionar el método de cálculo óptimo con el mínimo esfuerzo computacional, especialmente cuando el tamaño de la red o los errores de medición pueden generar problemas numéricos relacionados con la

precisión y la estabilidad.

9. Apéndice: La identidad matricial de Frobenius y Schur

Debido a su gran importancia en ingeniería, la identidad matricial de Frobenius y Schur ¹⁶ — a menudo citada pero raramente explicada — se deriva de manera detallada y sencilla a partir de la inversión de una matriz en bloques con las submatrices A, B, C y D. Esta identidad matricial también se conoce frecuentemente como lema de inversión de matrices.

Si se multiplica una matriz en bloques con estructura de este tipo por su inversa —que en este caso está compuesta por las submatrices E, F, G y H— se obtiene una matriz identidad en bloques, con las submatrices correspondientes a la matriz cero, $\mathbb{O}$, y la matriz unidad, $\mathbb{E}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \quad (63)$$

Con las submatrices (A . . . H) se obtienen las ecuaciones ((64)). Las matrices A y D son invertibles en esta aplicación.

$$\begin{array}{ll} a: & \mathbb{E} = A \cdot E + B \cdot G \quad c: \quad \mathbb{O} = A \cdot F + B \cdot H \\ b: & \mathbb{O} = C \cdot E + D \cdot G \quad d: \quad \mathbb{E} = C \cdot F + D \cdot H \end{array} \quad (64)$$

La inversión de la matriz en bloques más grande, con las submatrices A, B, C y D, se puede calcular de manera más conveniente mediante transformaciones elementales utilizando las submatrices más pequeñas A, B, C y D del sistema de ecuaciones (64).

Para el desarrollo del lema de inversión de matrices, las submatrices E, F, G y H se determinan de dos maneras distintas:

- Usando la inversa de la matriz A
- Usando la inversa de la matriz D

A continuación, los resultados de las dos inversiones —es decir, las submatrices E, F, G y H obtenidas en los dos pasos— se colocan cada una en una matriz, y el lema de inversión de matrices se determina comparando las dos submatrices E y H.

Inversión utilizando la inversa de la matriz A

En el primer paso, el sistema de ecuaciones (64) se resuelve utilizando la inversa de la matriz A. Las ecuaciones que siguen contienen los resultados intermedios: la reordenación de (64).c para F (véase ecuación (65)), la sustitución de F en (64).d (véase ecuación (66)) y la factorización de H en (66) (véase ecuación (67)).

$$F = -A^{-1} \cdot B \cdot H \quad (65)$$

$$\mathbb{E} = C \cdot (-A^{-1} \cdot B \cdot H) + D \cdot H \quad (66)$$

$$\mathbb{E} = (D - C \cdot A^{-1} \cdot B) \cdot H \quad (67)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, la submatriz H se puede calcular invirtiendo un término en

¹⁶La identidad matricial de Frobenius [23], 1912, y Schur [24], 1918, también se conoce en los países de habla inglesa erróneamente como la identidad matricial de Woodbury [25], 1949.

(67), y la submatriz F se obtiene sustituyendo H en (65), véase ecuación (69). La regla de cálculo de la submatriz H^{-1} también se conoce como el complemento de Schur con respecto a A.

$$H = (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \quad (68)$$

$$F = -A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \quad (69)$$

De manera análoga, al reorganizar (64).a para la submatriz E (véase ecuación (70)), sustituir posteriormente E en la ecuación (64).b y factorizar G en la ecuación (71), se obtiene la ecuación (72).

$$E = A^{-1} \cdot (\mathbb{E} - B \cdot G) \quad (70)$$

$$\mathbb{O} = C \cdot A^{-1} \cdot (\mathbb{E} - B \cdot G) + D \cdot G \quad (71)$$

$$\mathbb{O} = C \cdot A^{-1} + (D - C \cdot A^{-1} \cdot B) \cdot G \quad (72)$$

Las submatrices G y E se pueden calcular a partir de los resultados intermedios (véanse ecuaciones (70), (71), (72)) mediante reorganización e inversión (véase ecuación (73)), así como sustituyendo G en la ecuación (70) y reorganizando posteriormente los términos (véase ecuación (74)).

$$G = -(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \quad (73)$$

$$E = A^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \quad (74)$$

Inversión utilizando la inversa de la matriz D

En el segundo paso, las submatrices de la inversa buscada E, F, G y H se determinan utilizando la inversa de la submatriz D de la siguiente manera: reorganizando la ecuación ((64)).b para G (véase ecuación (75)), sustituyendo posteriormente G en la ecuación (64).a (véase ecuación (76)) y factorizando la submatriz E en la ecuación (76) (véase ecuación (77)).

$$G = -D^{-1} \cdot C \cdot E \quad (75)$$

$$\mathbb{E} = A \cdot E - B \cdot (D^{-1} \cdot C \cdot E) \quad (76)$$

$$\mathbb{E} = (A - B \cdot D^{-1} \cdot C) \cdot E \quad (77)$$

A partir de estas ecuaciones, la submatriz E se puede calcular invirtiendo el término en la ecuación (77) (véase ecuación (78)), y la submatriz G se obtiene sustituyendo E en la ecuación (75) (véase ecuación (79)). La regla de cálculo de la submatriz E^{-1} en la ecuación (78) también se conoce como el complemento de Schur con respecto a D.

$$E = (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \quad (78)$$

$$G = -D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \quad (79)$$

Para determinar las submatrices H y F, el sistema de ecuaciones (64) se reorganiza de la siguiente manera: se despeja (64).d para la submatriz H (véase ecuación (80)), y luego se sustituye H en la ecuación (64).c, factorizando F en la ecuación (81) (véase (82)).

$$H = D^{-1} (\mathbb{E} - C \cdot F) \quad (80)$$

$$\mathbb{O} = A \cdot F + B \cdot (D^{-1} (\mathbb{E} - C \cdot F)) \quad (81)$$

$$\mathbb{O} = B \cdot D^{-1} + (A - B \cdot D^{-1} \cdot C) \cdot F \quad (82)$$

Finalmente, las submatrices F y H se pueden determinar a partir de los resultados intermedios de la siguiente manera: se reorganiza la ecuación (82) para obtener la ecuación (83), se sustituye F en la ecuación (80) y, posteriormente, se reorganizan los términos para obtener la ecuación (84).

$$F = -(A - B \cdot D^{-1}C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \quad (83)$$

$$H = D^{-1} + D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \quad (84)$$

En el siguiente paso, se comparan las submatrices individuales de las inversas obtenidas por los distintos métodos.

Comparación de las inversas

Al insertar los resultados de las ecuaciones (68), (69), (73) y (74) en una matriz, se obtiene la ecuación (85), y al insertar los resultados de las ecuaciones (83), (84), (78) y (79) en una matriz, se obtiene la ecuación (86).

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} & -A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \\ -(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} & (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} & -(A - B \cdot D^{-1}C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \\ -D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \end{bmatrix} \quad (86)$$

Comparando los términos correspondientes a las submatrices E y H en las ecuaciones (85) y (86), se obtiene el llamado lema de inversión de matrices.

$$(A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot (D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot C \cdot A^{-1} \quad (87)$$

$$(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1} \cdot C \cdot (A - B \cdot D^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B \cdot D^{-1} \quad (88)$$

Con las siguientes sustituciones: $X = A, U = B, Y = -D^{-1}, V = C$ en la ecuación (87) y $X = D, U = C, Y = -A^{-1}, V = B$ en la ecuación (88), se obtiene la llamada identidad matricial en la forma de la ecuación (89) - la forma de Woodbury [25] -, que establece la relación entre el análisis de malla y el análisis nodal.

$$(X + UYV)^{-1} = X^{-1} - X^{-1}U(Y^{-1} + VX^{-1}U)^{-1}VX^{-1} \quad (89)$$

Referencias

- [1] G. Kirchhoff. *Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige*. Annalen der Physik und Chemie, Poggendorff, 1845.
- [2] G. Kirchhoff. *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ström geführt wird,*. Annalen der Physik und Chemie, Poggendorff,, 1847.
- [3] E. Philippow. *Taschenbuch der Elektrotechnik*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1985.
- [4] S. Paul; R. Paul. *Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik I*. Springer, 2016.
- [5] R. Schwartz. *Analyse nichtlinearer Netzwerke im Zustandsraum*. Oldenbourg, 1989.
- [6] H. Weyl. *Repartición de corriente en una red conductora*. Rev. Mat. Hispano-Americana, 1927.
- [7] A. v. d. Schaft. *The flow equations of linear resistive electrical networks*. arXiv:1712.10263, math.OC, 2017.
- [8] F.Bullo F. Dörfler, J.Simpson-Porro. *Electrical Networks and Algebraic Graph Theory: Models, Properties, and Applications*. Proceedings of IEEE, 2018.
- [9] C. Alexander; M. Sadiku. *Fundamentals of Electric Circuits*. McGraw Hill, 7. edition, 2021.
- [10] W. Hayt; J. Kemmerly; J. Philpis; S. Durin. *Engineering circuit analysis*. Mc Graw Hill, 5. edition, 2019.
- [11] A. Izadian. *Fundamentals of modern electric circuit analysis and filter synthesis*. Springer, 2019.
- [12] J. Gottling. *Node and Mesh Analysis by Inspection*. IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION, 1995.
- [13] J. Vlach. *Computer methods for circuit design analysis and design*. Springer, 1983.
- [14] J. Nilssen; S. Riedel. *Electric circuits*. Pearson, 2016.
- [15] R. Boylestad. *Introductory circuit analysis*. Pearson, 2016.
- [16] J. Edminster; M. Nahvi. *Electric circuits*. Schaum's Electronic Tutor, 3. edition, 2016.
- [17] W. Barnard B. Skromme. *Turning Mesh Analysis Inside Out*. ASEE, 2020.
- [18] H. F. Mayer. *Über das Ersatzschema der Verstärkerröhre*. Telegraphen- und Fernsprech-Technik, 1927.
- [19] H. Helmholtz. *Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-electrischen Versuche*. Annalen der Physik und Chemie, 1853.
- [20] M. Stanimirov; L. Sandoval. *Análisis de malla para circuitos no-planos (3D)*. Ingeniería eléctrica, Los editores, Argentina, 2021.
- [21] E. L. Norton. *Design of finite networks for uniform frequency characteristic*. Technical Report TM26-0-1860, Bell Laboratories, 1927.
- [22] S. Stanimirov Sandoval M. Stanimirov, L. Sandoval. *Análisis de malla para circuitos no-planos (3D) con Octave*. Ingeniería Eléctrica, Los Ediores, Argentina, 2023.

- [23] G. Frobenius. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1912.
- [24] J. Schur. *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Crelle, 1918.
- [25] M. Woodbury. *The Stability of Out-Input Matrices*. Chicago, Ill, 1949.
- [26] B. D. H. Tellegen. *A general network theorem, with applications*. Philips Res. Rept, 1952.
- [27] L. Thévenin. *Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique*. C. R. des Séances de l'Académie des Sciences, 1883.
- [28] R. Kalman. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. ASME–Journal of Basic Engineering, 1960.
- [29] B. Gibbs. *Advanced Kalman filtering Least-Square modeling*. Wiley, 2011.
- [30] M. Stanimirov; B. Deck; W. Rueegg. *Verfahren zum Messen des Widerstands und der Induktivität einer Leitung*. EP 1 203 961 B1, 2000.
- [31] D. White. *Using the Sherman Morrison Woodbury formula for coupling external circuits with FEM for Simulation of eddy current problems*. IEEE Transactions on Magnetics, 2009.
- [32] L. Sandoval M. Stanimirov. *A new direct relationship between equation-sets derived by energy and charge conservation using topological algebra*. Light-Matter Interactions at Interfaces, Rostock, 2024.